Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES ET SON APPLICATION DANS LA THÉORIE DES CONNEXES

Autor: Sintsof, D.

Kapitel: §2. — Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21867

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

données homogènes des trois points et l'aire du triangle qu'ils forment.

Passons à l'espace.

§ 2. — *Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.*

Prenons pour le système des coordonnées tétraédriques x, y, z, t, les quatre perpendiculaires abaissées d'un point M sur les quatre plans d'un certain tétraèdre fondamental. Soient A, B, C, D les 4 sommets, α, β, γ, δ les aires des faces opposées, on a

$$\alpha \,.\, x + \beta \,.\, y + \gamma \,.\, z + \delta \,.\, t = 3 \,.\, V_0 \,. \tag{1}$$

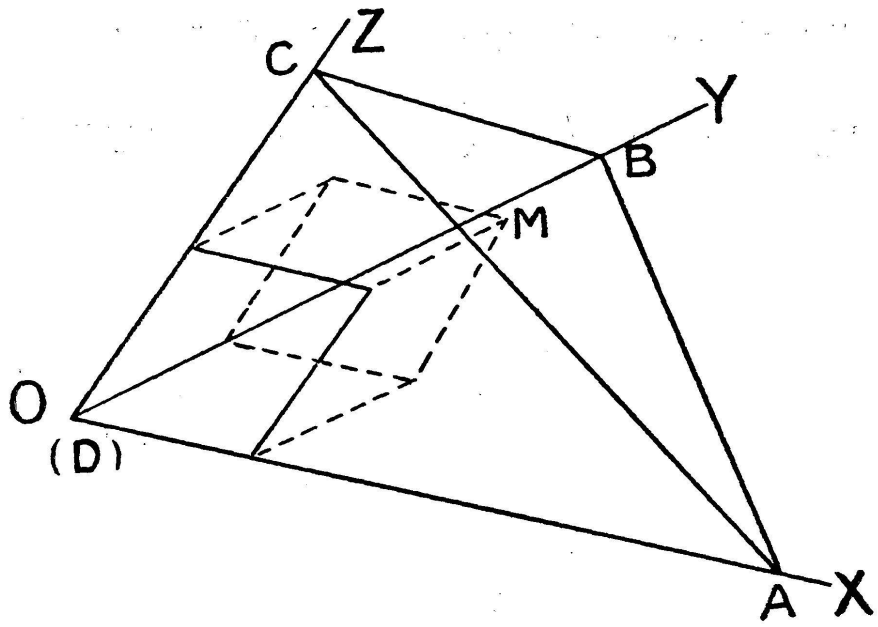

Fig. 2.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x\,, & y\,, & z\,, & t \\ x'\,, & y'\,, & z'\,, & t' \\ x''\,, & y''\,, & z''\,, & t'' \\ x'''\,, & y'''\,, & z'''\,, & t''' \end{vmatrix} = \frac{3V_0}{\delta} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} . \tag{2}$$

Choisissons à présent un système des coordonnées non-homogènes obliquangles ayant pour plans les 3 plans du tétraèdre fondamental — alors z, parexemple, est la hauteur du parallélépipède dont les arêtes sont $\bar{y}$, $\bar{x}$, $\bar{z}$, — de sorte que $z = \bar{z} \cos (z, \bar{z})$ (fig. 2).

De même

$$y = \bar{y} \,.\, \cos\,(y\,,\ \bar{y})\ ,$$

$$x = \bar{x} \,.\, \cos\,(x\,,\ \bar{x})\ .$$

Ainsi

$$(xy'z''t''') = (\bar{x}\,.\,\bar{y'}\,.\,\bar{z''}\,.\,1)\,.\,\frac{3V_0}{\delta}\cos\,(x\,,\ \bar{x})\,.\,\cos\,(y\,,\ \bar{y})\,\cos\,(z\,,\ \bar{z})\ .$$

Du point O comme centre décrivons une sphère de rayon 1, soient X. Y, Z les 3 points de rencontre de cette sphère avec les axes des coordonnées obliques; soient

$$\sphericalangle\ \mathrm{YOX} = \lambda\ ,\qquad \sphericalangle\ \mathrm{XOZ} = \mu\ ,\qquad \sphericalangle\ \mathrm{YOZ} = \nu\ .$$

Nous aurons un triangle sphérique, dont les hauteurs (fig. 3)

$$h_\lambda = \frac{\pi}{2} - (z\,,\ \bar{z})\ ,\qquad h_\mu = \frac{\pi}{2} - (y\,,\ \bar{y})\ ,\qquad h_\nu = \frac{\pi}{2} - (z\,,\ \bar{z})$$

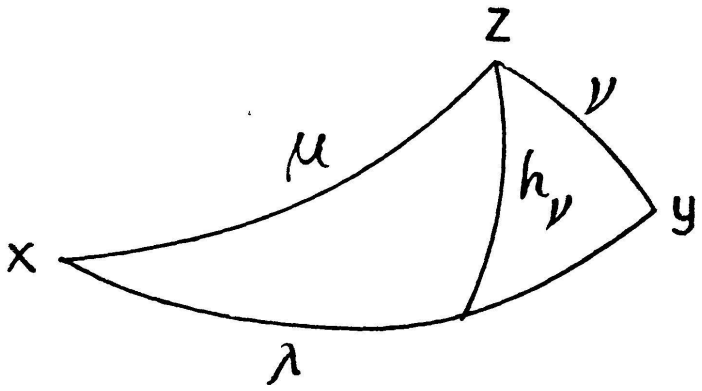

Fig. 3.

sont à calculer. Désignons les angles du triangle sphérique XYZ respectivement par X, Y, Z.

Alors

$$\sin h_\lambda = \sin\mu\,.\,\sin \mathrm{X} = \sin\nu\,.\,\sin \mathrm{Y}\ .$$

Soit

$$\lambda + \mu + \nu = 2s\ .$$

D'après les formules connues de la trigonométrie sphérique

$$\sin \mathrm{X} = 2\,\frac{\sqrt{\sin s\,.\,\sin\,(s-\lambda)\,.\,\sin\,(s-\mu)\,.\,\sin\,(s-\nu)}}{\sin\lambda\,.\,\sin\mu} = \frac{2\sqrt{\mathrm{P}}}{\sin\lambda\,\sin\mu}\,.$$

De même

$$\sin Y = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda \,.\, \sin\nu}, \qquad \sin z = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\nu \sin\mu}.$$

Donc

$$\sin h_\lambda = \cos(z, \bar{z}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda},$$

$$\sin h_\mu = \cos(y, \bar{y}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\mu},$$

$$\sin h_\nu = \cos(x, \bar{x}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\nu}.$$

Ainsi

$$(x y' z'' t''') = \frac{8 \,.\, 3 \,.\, V_0}{\delta} \cdot \frac{P^{3/2}}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} (\bar{x}\, \bar{y'}\, \bar{z''}, 1) \,. \qquad (3)$$

Mais ce n'est pas encore la relation définitive. Il est intéressant d'établir le multiplicateur exact. Introduisons un système de coordonnées dont l'axe $O\xi$ coïncide avec l'axe $O\bar{X}$, OH étant situé dans le plan $\bar{X}O\bar{Y}$ et perpendiculaire à $O\bar{X}$, enfin OZ étant perpendiculaire au plan $\bar{X}O\bar{Y}$.

Nous aurons pour le tableau des 9 cosinus:

	OΞ	OH	OZ
$\bar{O}X$	1	0	0
$\bar{O}Y$	$\cos\lambda$	$\sin\lambda$	0
$\bar{O}Z$	$\cos\mu$	$\cos U$	$\cos W$

Les angles U et W sont à déterminer à l'aide des relations de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0 \,. \qquad (4)$$

Pour déterminer cos W nous substituons les angles de OZ :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & 0 \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos W \\ 0 & 0 & \cos W & 1 \end{vmatrix} = 0 \,,$$

ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 - \cos^2 W \end{vmatrix},$$

ou enfin

$$4P - \cos^2 W \,.\, \sin^2\lambda = 0 ,$$

d'où l'on tire

$$\cos W = \pm \frac{\sqrt{P}}{\sin\lambda} . \tag{5}$$

De même pour le calcul de cos U nous avons à substituer dans (4) les angles de OH, ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & \sin\lambda \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos U \\ 0 & \sin\lambda & \cos U & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \cos U = \frac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} , \tag{6}$$

Ainsi les formules de transformation deviennent

$$\overline{X} + \overline{Y}\cos\lambda + \overline{Z}\cos\mu = \xi ,$$

$$\overline{X}\cos\lambda + \overline{Y} + \overline{Z}\cos\nu = \xi\cos\lambda + \eta\sin\lambda ,$$

$$\overline{X}\cos\mu + \overline{Y}\cos\nu + \overline{Z} = \xi\cos\mu + \eta\frac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta\frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} .$$

Formons à présent le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi , & \xi\cos\lambda + \eta\sin\lambda , & \xi\cos\mu + \eta\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi' , & \xi'\cos\lambda + \eta'\sin\lambda , & \xi'\cos\mu + \eta'\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta'\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi'' , & \xi''\cos\lambda + \eta''\sin\lambda , & \xi''\cos\mu + \eta''\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta''\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi''' , & \xi'''\cos\lambda + \eta'''\sin\lambda , & \xi'''\cos\mu + \eta'''\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta'''\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \end{vmatrix} .$$

Il est égal, comme il est facile à voir, à

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi' & \eta' & \zeta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' & 1 \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' & 1 \end{vmatrix} \times \sin\lambda \times \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} = 6V . 2\sqrt{P} . \tag{7}$$

Mais, d'autre part, ce déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} \overline{X} + \overline{Y}\cos\lambda + \overline{Z}\cos\mu, & \overline{X}\cos\lambda + \overline{Y} + \overline{Z}\cos\nu, & \overline{X}\cos\mu + \overline{Y}\cos\nu + \overline{Z}, & 1 \\ \overline{X'} + \overline{Y'}\cos\lambda + \overline{Z'}\cos\mu, & \overline{X'}\cos\lambda + \overline{Y'} + \overline{Z'}\cos\nu, & \overline{X'}\cos\mu + \overline{Y'}\cos\nu + \overline{Z'}, & 1 \\ \overline{X''} + \overline{Y''}\cos\lambda + \overline{Z''}\cos\mu, & \overline{X''}\cos\lambda + \overline{Y''} + \overline{Z''}\cos\nu, & \overline{X''}\cos\mu + \overline{Y''}\cos\nu + \overline{Z''}, & 1 \\ \overline{X'''} + \overline{Y'''}\cos\lambda + \overline{Z'''}\cos\mu, & \overline{X'''}\cos\lambda + \overline{Y'''} + \overline{Z'''}\cos\nu, & \overline{X'''}\cos\mu + \overline{Y'''}\cos\nu + \overline{Z'''}, & 1 \end{vmatrix},$$

que l'on transforme facilement en

$$\begin{vmatrix} (\overline{X'} - \overline{X}) + (\overline{Y'} - \overline{Y})\cos\lambda + (\overline{Z'} - \overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X'} - \overline{X})\cos\lambda + (\overline{Y'} - \overline{Y}) + (\overline{Z'} - \overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X'} - \overline{X})\cos\mu + (\overline{Y'} - \overline{Y})\cos\nu + (\overline{Z'} - \overline{Z}) \\ (\overline{X''} - \overline{X}) + (\overline{Y''} - \overline{Y})\cos\lambda + (\overline{Z''} - \overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X''} - \overline{X})\cos\lambda + (\overline{Y''} - \overline{Y}) + (\overline{Z''} - \overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X''} - \overline{X})\cos\mu + (\overline{Y''} - \overline{Y})\cos\nu + (\overline{Z''} - \overline{Z}) \\ (\overline{X'''} - \overline{X}) + (\overline{Y'''} - \overline{Y})\cos\lambda + (\overline{Z'''} - \overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X'''} - \overline{X})\cos\lambda + (\overline{Y'''} - \overline{Y}) + (\overline{Z'''} - \overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X'''} - \overline{X})\cos\mu + (\overline{Y'''} - \overline{Y})\cos\nu + (\overline{Z'''} - \overline{Z}) \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \overline{X'} - \overline{X}, & \overline{Y'} - \overline{Y}, & \overline{Z'} - \overline{Z} \\ \overline{X''} - \overline{X}, & \overline{Y''} - \overline{Y}, & \overline{Z''} - \overline{Z} \\ \overline{X'''} - \overline{X}, & \overline{Y'''} - \overline{Y}, & \overline{Z'''} - \overline{Z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \overline{X} & \overline{Y} & \overline{Z} & 1 \\ \overline{X'} & \overline{Y'} & \overline{Z'} & 1 \\ \overline{X''} & \overline{Y''} & \overline{Z''} & 1 \\ \overline{X'''} & \overline{Y'''} & \overline{Z'''} & 1 \end{vmatrix} . 4P . \qquad (8)$$

Donc, revenant à la formule (A) nous aurons:

$$(xy'z''z''') = \frac{8 . 3V_0}{\delta} . \frac{P^{3/2}}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} \frac{6V . 2\sqrt{P}}{4P} .$$

Donc, enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = \frac{72V_0}{\delta} \frac{P}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} . V \qquad (9)$$

c'est la formule, que nous voulions établir.

Il est à remarquer que le facteur

$$\frac{72 V_0 P}{\delta \,.\, \sin\lambda \sin\mu \sin\nu}$$

ne dépend que du choix du tétraèdre de référence; il est le même pour tous les quatre points choisis M, M′, M″, M‴.

§ 3. — *Moment de deux droites.*

La plus courte distance de deux droites de l'espace

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \frac{x-a'}{l'} = \frac{y-b'}{m'} = \frac{z-c'}{n'} \quad (1')$$

est donnée par la formule

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sqrt{\Sigma(mn'-nm')^2} \qquad (2)$$

ou bien

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sin V \,.\, \sqrt{l^2+m^2+n^2} \,.\, \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2} \qquad (2')$$

où V est l'angle de deux droites. L'expression devient plus simple si l, m, n, l', m', n' désignent les cosinus des angles, alors $l^2+m^2+n^2 = 1 = l'^2+m'^2+n'^2$. Nous avons

$$\delta \,.\, \sin V = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} . \qquad (3)$$

Le produit $\delta \,.\, \sin V$ est ce qu'on appelle *le moment de deux droites* (1) et (1′). Le déterminant à droite égalé à zéro exprime que les deux droites se coupent. On peut donc dire que *les deux droites de l'espace se coupent si leur moment s'annule*, — en d'autres mots, si leur plus courte distance est nulle, ou bien si elles font un angle nul, c'est-à-dire si elles sont parallèles.

Dans les deux cas le volume d'un tétraèdre que l'on conçoit en