§4. — Expression du moment de deux droites en coordonnées de la droite.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

des arêtes qui ne se coupent pas menons un plan *perpendiculaire à l'arête opposée* (ce qui est en général impossible et veut dire: perpendiculaire à la plus courte distance des deux arêtes). Le tétraèdre est décomposé en deux tétraèdres ayant pour base commune un triangle; le volume entier est égal à la somme (ou différence) des volumes de ces deux tétraèdres.

$$V = \frac{1}{3} S . (h_1 \pm h_2) , \qquad h_1 \pm h_2 = d' \sin V \quad \text{et} \quad S = \frac{a\delta}{2} ,$$

ce qui ramène à la formule (4).

En résumé, à l'aide des développements du § 2 nous pouvons dire, qu'*en coordonnées homogènes tétraèdriques le moment de deux droites s'exprime — jusqu'à un multiplicateur dépendant seulement du choix du système de coordonnées — par le déterminant composé des coordonnées des deux paires de points pris sur les deux droites.* Cette remarque va être mise à profit dans la suite.

§ 4. — *Expression du moment de deux droites en coordonnées de la droite.*

Prenons les coordonnées homogènes de la droite p_{ix}, liées par la relation

$$P \equiv (p , p) \equiv p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0 . \qquad (1)$$

La condition pour que deux droites p et p' se coupent est alors

$$(p , p') = \Sigma \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} p'_{ik} = 0 . \qquad (2)$$

Ce n'est autre chose, à un facteur près, que le volume du tétraèdre formé par deux segments de longueur 1 pris sur l'une et l'autre droite. En effet, si x, y sont deux points de la première droite, on a

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i ,$$

à un facteur près; si ξ, η sont deux points de la seconde,

$$p'_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i ;$$

ainsi donc

$$(p\,,\,p') = \Sigma(x_1 y_2)(\xi_3 \eta_4) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix},$$

et d'après § 2

$$= 6\lambda . V\,,$$

donc d'après § 3

$$= \lambda . \delta . \sin V\,.$$

Ainsi

$$\delta . \sin V = \lambda' . (p\,,\,p')\,. \tag{3}$$

Deuxième Partie: Applications.

§ 5. — *Applications à la théorie des connexes ternaires.*

1. — Soient (x, u), (y, v) deux éléments (point, droite) du plan connexe, et soient a la droite (xy), A le point (uv). Les coordonnées de A sont proportionelles aux mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \right\|.$$

Donc l'aire du triangle Axy, à un facteur près dépendant du choix du système des coordonnées, est représentée par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix} \equiv \Sigma(u_i v_k)(x_i x_k) \equiv u_x v_y - v_x u_y$$

donnée dans mon mémoire cité plus haut.

Mais nous pourrions considérer un autre triangle, notamment celui formé par les droites u, v, $a \equiv (xy)$. D'après une formule connue (G. Salmon, *Sections coniques*, n° 39, p. 53) son aire a pour expression

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (xy)_1 & (xy)_2 & (xy)_3 \end{vmatrix}^2}{(u_1 v_2)\,(v_1 (xy)_2) \cdot ((xy)_1 u_2)}\,,$$