Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Emile Borel. — Leçons sur les séries divergentes. Deuxième édition revue et entièrement remaniée avec le concours de Georges Bouligand. — Un vol. gr. in-8° de xii-260 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

configurations géodésiques sur les surfaces convexes..... Deux chapitres suivent sur la théorie générale des systèmes dynamiques et le cas de deux degrés de liberté. C'est une sorte de théorie des ensembles de mouvements avec très peu de formules ou avec d'ingénieux procédés graphiques tranchant, dans l'espace-temps, des questions d'*analysis situs*.

Le dernier chapitre a trait au Problème des Trois Corps envisagé avec les méthodes inaugurées par Sundmann. C'est la nature des collisions possibles ou impossibles qui régit cette savante analyse qui, par ce fait, se trouve dépendre également de l'*analysis situs*.

En voici assez pour dépeindre le prodigieux intérêt de ce livre qui développe, de manière très accessible et extrêmement élégante, des questions souvent considérées comme très ardues. Comme il arrive souvent, ces questions n'ont pas été traitées d'abord avec le maximum de simplicité mais on ne voit guère maintenant ce qui pourrait être plus clair que l'exposé de M. Birkhoff.

A. Buhl (Toulouse).

Emile Borel. — **Leçons sur les séries divergentes.** Deuxième édition revue et entièrement remaniée avec le concours de Georges Bouligand. — Un vol. gr. in-8° de xii-260 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

La première édition de cet ouvrage date de 1901. *L'Enseignement mathématique* en rendit compte par la plume d'Ettore Bortolotti (T. IV, 1902, p. 457). Que de chemin parcouru depuis lors. La question est intimément mêlée à celle du prolongement analytique attaquée par Mittag-Leffler à l'aide de méthodes de sommabilité et sur laquelle le regretté savant n'a dit son dernier mot qu'en 1918. Ce point d'histoire porte d'abord à établir une distinction à laquelle M. Borel tient beaucoup et non sans raison. Etudier la série *divergente*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

c'est étudier

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

pour $z = 1$, donc hors du cercle de convergence ; le prolongement analytique peut intervenir, mais il n'intervient pas forcément, ne serait-ce que parce que la première série peut-être étudiée tout autrement que par l'adjonction de la variable z qui a donné la seconde.

La théorie des séries asymptotiques de Poincaré, les développements en fractions continues offrent des ressources des plus élégantes pour donner certains droits de cité à la divergence.

Maintenant, il faut reconnaître, en fait, que, depuis 1901, c'est surtout la *sommabilité*, généralement cotoyée par le prolongement analytique, qui a entraîné le plus de travaux et de développements nouveaux. Cette constatation ne peut déplaire à M. Borel, créateur de la notion. Elle est d'ailleurs en évidence dans le présent livre dont les deux premiers chapitres ne sont pas plus étendus que dans la première édition, malgré quelques transformations très heureuses. L'extension ne commence qu'avec le Chapitre III dédié aux séries sommables.

M. L. Féjer, en 1904, faisait un coup de maître en créant une sommabilité des séries de Fourier conduisant à une intégrale définie plus simple que celle correspondant à la sommation proprement dite. Cela donna envie de rechercher dans quels cas on pouvait espérer des résultats analogues et on réussit à indiquer des conditions précises quant à l'application de la méthode des moyennes de Cesàro.

Mais le plus beau est certainement du côté des séries en $c_n s_n$ où c_n est emprunté à un développement de fonction entière, c'est-à-dire toujours convergent, et domine, de par cet honnête caractère, le malin esprit de divergence des s_n. Le champ de bataille où l'on pouvait constater la victoire de ces excellents c_n ne fut d'abord qu'un polygone puis les côtés de celui-ci s'incurvèrent, devinrent des courbes algébriques plus générales; les fonctions entières, probablement indignées contre les s_n, apportèrent, dans la coalition formée contre ceux-ci, un armement prodigieux et imprévu. Elles dévoilèrent des modes de croissance insoupçonnés jusqu'au jour où la série en $c_n s_n$ fut incontestablement maîtresse du champ complexe tout entier. J'ai l'air de plaisanter. Pas du tout. Tout cela possède une vie intense et tragique, comme celle des microbes, des insectes ou des hommes. Ces derniers points, à vrai dire, ne sont développés que sommairement dans la présente et nouvelle édition. Le rapprochement entre les séries divergentes et les séries (M) ou séries de polynomes de Mittag-Leffler est conservé, conformément aux idées initiales de M. Borel, mais un Appendice nous apporte d'autres analogies du plus grand intérêt. Il y a une méthode de facteurs de convergence, en relation avec les travaux de M. Le Roy qui transforme une $f(z)$, holomorphe autour de l'origine, en une fonction entière dépendant d'un paramètre t; quand ce t tend vers 1, cette fonction entière tend vers $f(z)$ dans une certaine partie de l'étoile. Mittag-Leffler approchait de même, généralement par double limite, de toute $f(z)$ à étoile donnée et dans des régions de plus en plus étendues de cette étoile. Ce sont des résultats à comparer. D'autres extensions ne vont pas sans les séries de Dirichlet à sommabilité étudiée par Bohr, Hardy, Riesz.

Enfin disons quelques mots des fonctions quasi-analytiques correspondant à l'existence de certaines séries numériques divergentes; la quasi-analyticité est débarrassée de la variable complexe qui semble précisément ne pouvoir jouer un rôle fonctionnel qu'au milieu de conditions de convergence qu'un esprit pénétrant arriverait à réduire, tout en conservant l'indéfinie dérivabilité. Ce fut là une grande idée de M. Borel, contestée par Mittag-Leffler et triomphant définitivement avec MM. Denjoy et Carleman. L'espace manque pour en dire davantage. M. Georges Bouligand a apporté à M. Borel, pour cette seconde édition, ce que ce dernier appelle un inappréciable concours. On ne saurait mieux dire. Même dans une erreur apparente, qui me concerne, M. Bouligand fait une trouvaille profonde. Dans la liste des ouvrages à consulter, placée en tête du volume, il cite mon fascicule du Mémorial sur les *Formules stokiennes* au lieu de celui consacré aux *Séries analytiques*. Peu importe. Les deux fascicules sont bâtis sur la transformation des intégrales multiples, comme l'œuvre de Weyl également citée à propos des séries divergentes. Invention du diable disait Abel en parlant de ces séries. Mais qui ne sait que les tours du diable sont souvent profonds et intéressants.

A. Buhl (Toulouse).