Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ROTATIONNEL ET FORMULE DE STOKES
Autor: Bouligand, Georges / Roussel, Andrè
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21866

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

JACOBIEN, DIVERGENCE, FORMULE DE GREEN

PAR

M. Georges BOULIGAND (Poitiers).

ROTATIONNEL ET FORMULE DE STOKES

PAR

M. André ROUSSEL.

Le but de cet article est d'exposer comment on peut généraliser la définition de certains opérateurs du Calcul vectoriel, de manière à conserver un sens aux identités fondamentales relatives au changement de variables dans les intégrales multiples, au théorème flux divergence, etc., dans plusieurs cas étendus où elles cesseraient d'en avoir un sous leur forme classique, et cela parce que des hypothèses de dérivabilité ne seraient plus satisfaites. Nous nous placerons, pour simplifier le langage dans le cas de l'espace à trois dimensions.

1. — *Rappel de quelques notions préliminaires* [1].

Soit un champ vectoriel obtenu en faisant correspondre à chaque point M de l'espace le vecteur $\vec{V}(M)$. Indiquons rapidement comment on définit la *divergence* de ce champ.

Le vecteur $\vec{V}$ (M) peut être considéré comme la vitesse d'une particule d'un milieu continu qui se trouve en M à un instant déterminé t; on peut alors lui faire correspondre biunivoquement la transformation infinitésimale permettant de déduire de la configuration du milieu au temps t sa configuration au temps $t + dt$. Il est donc indiqué de faire dériver la théorie des champs vectoriels de celle des transformations. Pour cela, nous passerons

---

[1] Voir les « *Leçons de Géométrie vectorielle* » de G. Bouligand (Vuibert), troisième partie, paragraphes 154 à 174.

Les nos 1 à 8 de ce mémoire formaient l'introduction d'un cours sur les fonctions harmoniques, professé à l'Université de Cracovie pendant le 1er trimestre de l'année scolaire 1925-26. Les nos 9, 10, 11, 12 sont entièrement dus à M. André Roussel. (G. B.)

par l'intermédiaire des transformations finies et nous introduirons le *Jacobien* comme limite du rapport de deux volumes correspondants, lorsque le diamètre de l'un tend vers zéro. La *divergence* sera la notion limite du jacobien, obtenue en passant du cas des transformations finies à celui des transformations infinitésimales. C'est ce que nous allons préciser.

2. — *Propriétés locales d'une transformation finie.*

Soit une transformation finie:

$$P = \mathcal{T}(M) \tag{1}$$

qui à chaque point M d'un premier espace $\mathcal{E}_M$ fait correspondre *continument* un point P d'un second espace $\mathcal{E}_P$ [1]. Le mode de symbolisme (1) convient bien pour l'étude des propriétés de la transformation indépendantes des dimensions et correspond très exactement à la notation habituelle

$$y = f(x)$$

désignant une fonction d'une variable, par laquelle on établit une correspondance liant à certains points de xx' certains points de yy' (cas d'une dimension).

Reprenons la transformation continue définie par (1). Soit M_0 un point particulier de $\mathcal{E}_M$ et soit P_0 son transformé. La transformation étant continue, si M est voisin deM_0, P sera voisin de P_0. Une hypothèse naturelle et fréquente consiste à supposer l'existence d'une transformation linéaire tangente en chaque point M_0 de la région considérée dans $\mathcal{E}_M$. L'introduction d'axes de coordonnées nous amènerait à remplacer l'équation (1) par trois équations scalaires:

$$X = f(x, y, z) \; ; \qquad Y = g(x, y, z) \; , \qquad Z = h(x, y, z) \; . \tag{2}$$

La transformation linéaire tangente est celle qui au point M_0 fait correspondre P_0 et qui au vecteur $\overrightarrow{dM}(dx, dy, dz)$ fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{dP}(dX, dY, dZ)$, d'origine P_0 et dont les composantes dX, dY, dZ sont les différentielles totales des fonc-

[1] L'espace $\mathcal{E}_P$ n'est pas nécessairement distinct de l'espace $\mathcal{E}_M$.

tions (2). Lorsque la transformation linéaire tangente existe en chaque point M d'une région R de $\mathcal{E}_M$ et lorsqu'elle dépend continument de M dans cette région, on peut alors établir le théorème suivant:

Soit (M_0, P_0) un couple de points qui se correspondent dans $\mathcal{E}_M$ $\mathcal{E}_P$ et par la transformation $\mathcal{T}$. Soit:

$$J(M_0) = \begin{vmatrix} f'_{x_0} & f'_{y_0} & f'_{z_0} \\ g'_{x_0} & g'_{y_0} & g'_{z_0} \\ h'_{x_0} & h'_{y_0} & h'_{z_0} \end{vmatrix}$$

le déterminant de la transformation linéaire $\mathcal{T}_{M_0}$ tangente à $\mathcal{T}$ en M_0. Supposons que ce déterminant ne soit pas nul, c'est-à-dire que $\mathcal{T}_{M_0}$ ne soit pas dégénérescente. On peut alors définir un certain voisinage de M_0 et un certain voisinage de P_0 entre lesquels la correspondance définie par (1) s'exerce d'une manière biunivoque. A un volume infiniment petit et infiniment voisin de M_0, correspond un volume infiniment petit et infiniment voisin de P_0; le rapport du second au premier tend précisément vers $J(M_0)$. Cette fonction $J(M)$, limite du rapport de deux volumes correspondants, définie indépendemment du nombre des dimensions, se réduit à la dérivée dans le cas d'une dimension. Notons encore que $J(M)$ est définie, non seulement en valeur absolue, mais encore en signe, celui-ci indiquant si l'orientation des figures voisines de M_0, rapportée aux axes x, y, z concorde ou non avec l'orientation des figures voisines de P_0, rapportée aux axes X, Y, Z [1].

---

[1] Moyennant ces hypothèses, une annulation du jacobien le long d'une surface S prise dans $\mathcal{E}_M$ et déterminant dans son voisinage deux régions R_M et R'_M entraîne *en général* dans l'espace $\mathcal{E}_P$ la circonstance suivante: soit Σ la transformée de S qui sépare aussi son voisinage en deux régions R_P et R'_P. Les points M voisins de S, de part et d'autre de S (dans R_M et R'_M) ont pour transformés des points P voisins de Σ et situés d'un même côté de Σ (p. ex. dans R_P exclusivement). Il y a là une propriété indépendante du nombre n des dimensions. Dans le même ordre d'idées citons la suivante qui généralise le théorème de Rolle: soit la transformation $P = \mathcal{T}(M)$ soumise à toutes les hypothèses précédentes, et soit un domaine D de l'espace $\mathcal{E}_M$, limité par une surface d'un seul tenant, douée d'un champ continu de normales. Supposons que tous les points de cette surface aient même transformé P_0. Dès lors on peut trouver dans D au moins une surface sur laquelle le jacobien s'annule. Pour le démontrer, à l'exemple de ce qui se fait dans le théorème de Rolle, on considérera la surface qui délimite le domaine Δ recouvert par les transformés des points de D. Elle provient d'une certaine surface du premier espace, sur laquelle il y a précisément annulation du jacobien, avec changement de signe.

Remarques. — Nous venons d'employer la locution *volume*. Par volume, nous entendons ici un domaine (= ensemble d'un seul tenant dont chaque point peut être pris pour centre d'une sphère dont tous les points appartiennent à l'ensemble) dont la *mesure intérieure* et la *mesure extérieure* sont égales. Ces mesures sont définies à l'aide d'un *réseau binaire progressif* (formé à partir d'un cube initial arbitraire, du pavage régulier de l'espace obtenu en lui juxtaposant des cubes égaux, et de tous les pavages analogues qui s'en déduisent par subdivision binaire des arêtes, indéfiniment répétée). La mesure intérieure est alors la borne supérieure des volumes polyèdres intérieurs au domaine donné et obtenus par sommation de cubes du réseau indéfini, tandis que la mesure extérieure est la borne inférieure des volumes des polyèdres englobant le domaine et obtenus aussi par sommation de cubes du réseau indéfini. Le domaine donné est un volume seulement quand ces bornes sont égales.

3. — *Opportunité d'une définition directe du jacobien.*

Il n'est pas nécessaire de passer par l'intermédiaire de la transformation linéaire tangente pour définir le jacobien. L'hypothèse d'existence de cette transformation introduit à la généralité d'inutiles restrictions. Supposons que les formules (2) soient du type suivant :

$$X = x \qquad Y = y \qquad Z = z + \psi(x, y) .$$

Nous aurons une transformation conservant les volumes, en grandeur et en signe. Il est donc naturel de lui attribuer un jacobien égal à $+ 1$. Cependant, si la fonction $\psi(x, y)$ n'a pas de dérivées, il n'y aura pas de transformation linéaire tangente.

Il y a donc lieu de définir le jacobien directement. On peut proposer diverses définitions, exigeant chacune une revision des propositions ci-dessus rappelées, notamment du théorème relatif à la réversibilité locale de la transformation. En réalité, nous n'aurons ici à raisonner que sur des transformations intégralement biunivoques (déformations), à la classe desquelles les transformations infinitésimales appartiennent nécessairement.

Le moment est revenu de préciser nos hypothèses sur la transformation $\mathcal{T}$.

a) A une région $\mathcal{R}_M$ de $\mathcal{E}_M$, elle fait correspondre biunivoquement et continument une région $\mathcal{R}_P$ de $\mathcal{E}_P$.

b) A toute sphère intérieure à $\mathcal{R}_M$ correspond effectivement un *volume* intérieur à $\mathcal{R}_P$. Soit v le volume de la sphère, v' son correspondant.

c) Soit un point *fixe* intérieur à $\mathcal{R}_M$; prenons une sphère infiniment petite de centre M; alors le rapport $\frac{v'}{v}$ tend vers une limite déterminée J (M).

d) Lorsque M décrit une région quelconque, strictement intérieure à $\mathcal{R}_M$, la famille des fonctions $\frac{v'}{v}$ de M (dépendant du paramètre v) est bornée dans son ensemble, cette borne s'appliquant nécessairement à J (M).

e) J (M) est continue à l'intérieur de $\mathcal{R}_M$.

Nous appellerons J (M) le *jacobien sphérique centré*, locution proposée par M. Wilkosz et qui a l'avantage de rappeler les conditions particulières de la définition, favorables dans certaines recherches, par exemple pour l'obtention de l'harmonicité moyennant des hypothèses simples et bien conformes au mode d'invariance du laplacien [1] qui sera défini comme une divergence sphérique centrée (n° 7).

4. — *Valeur du volume après une déformation finie.*

Dans tout ce qui suit les intégrations ont lieu au sens de M. Lebesgue. Des hypothèses *c*) et *d*) nous déduisons d'abord ce résultat : à tout *volume* (intérieur à $\mathcal{R}_M$) du premier espace correspond un *volume* du second.

Il suffit pour cela d'établir que le transformé d'un ensemble de mesure nulle est aussi de mesure nulle. Servons-nous d'un

[1] Dans d'autres questions, il pourra être plus avantageux de faire usage d'un jacobien sphérique non centré, ou encore d'un jacobien cubique (locutions qui se comprennent d'elles-mêmes). Notons que pour le théorème de variance des intégrales multiples, qui va nous occuper, et qui appartient en réalité à la géométrie linéaire, il est indiqué d'utiliser une forme de jacobien obtenue en substituant aux sphères de centre M des volumes v tels que la figure (M, v) reste homothétique d'une figure fixe. Il n'y a d'ailleurs qu'une simple transposition à faire dans la démonstration qui va être donnée, en remplaçant les sphères de centre M par les volumes v soumis à l'hypothèse précédente.

réseau binaire progressif. Il nous permettra d'enfermer l'ensemble dans une infinité de cubes dont la somme des volumes est arbitrairement petite. On peut énoncer la même propriété pour la somme des volumes des sphères circonscrites à ces cubes; or, de l'hypothèse *d*) nous tirons une limite supérieure pour la somme des volumes transformés des cubes, égale au produit d'un nombre fixe par la somme des volumes des sphères précédentes. Le résultat est donc établi. En même temps, il est clair qu'à tout nombre positif ε, il est possible de faire correspondre un nombre positif δ tel que l'inégalité:

$$\text{mes. d'un ens. de } \mathcal{R}_M < \delta$$

entraîne:

$$\text{mes. ens. transf.} < \varepsilon$$

c'est ce qu'on exprime en disant que la transformation $\mathfrak{T}$ est *absolument continue.*

Il s'agit maintenant de prouver qu'à un volume quelconque V, complètement intérieur à $\mathcal{R}_M$, correspond un volume V′ (nécessairement intérieur à $\mathcal{R}_P$) donné par la formule:

$$V' = \int_V J(M)\, d\omega_M \,. \tag{3}$$

Pour cela, nous tablerons sur la possibilité de trouver à l'intérieur de chaque volume un système d'une infinité dénombrable de sphères, mutuellement extérieures, et dont l'ablation ne laisserait subsister qu'un ensemble de mesure nulle. Admettons cette possibilité, qu'il suffirait d'établir pour un cube, le volume pouvant être obtenu au moyen d'une infinité dénombrable de cubes d'un réseau indéfiniment progressif.

En vertu de ce lemme, nous pourrons trouver dans Ω un premier ensemble E de sphères, conformément aux conditions indiquées. De E_1 passons à un ensemble analogue E_2, en prenant chaque sphère de E_1, enlevant de celle-ci une sphère concentrique et de rayon moitié, et appliquant le lemme au volume restant. En répétant indéfiniment ce procédé, nous aurons une suite:

$$E_1\,,\ E_2\,,\ \ldots\ E_l\,,\ \ldots$$

d'ensembles de sphères dont les centres formeront des ensembles désignés par

$$e_1, e_2, \ldots e_k, \ldots$$

L'ensemble e_k contient tous les e_i d'indices $i < k$. L'ensemble e_∞ formé de tous les points des e_k est dénombrable et *partout dense.*

Soit maintenant la fonction $J_k(M)$ définie dans les sphères de E_k de la manière suivante: dans chaque sphère dont le volume est v, nous lui attribuons la valeur constante $\frac{v'}{v}$. Cette fonction est partout définie dans V, sauf sur un ensemble de mesure nulle où nous pouvons la prendre égale à J(M). L'intégrale de la fonction ainsi construite a évidemment pour valeur le volume V', quelque soit k. Donc, lorsque k croît indéfiniment, elle tend vers une limite égale à V'. Or, *en vertu de la continuité de* J(M), les fonctions $J_k(M)$ qui sont bornées d'après *d*) tendent vers J(M) dans tout V lorsque k croît indéfiniment. La formule (3) apparaît alors comme une conséquence immédiate de ce théorème classique de Lebesgue: *l'intégrale de la limite dans le champ des fonctions bornées est égale à la limite de l'intégrale.*

Notons que le raisonnement présenté sous cette forme ne peut se passer de l'hypothèse de la continuité de J(M) : l'ensemble sur lequel nous savons d'une manière immédiate (c'est-à-dire sans invoquer la continuité) que $J_k(M)$ tend vers J(M) se compose de l'ensemble dénombrable e_∞ et d'une suite dénombrable d'ensembles de mesure nulle omis à chaque application de ce lemme. La limite n'est donc assurée sans la continuité que sur un ensemble de mesure nulle. Mais, si l'on fait l'hypothèse de la continuité, entraînant l'uniforme continuité, on voit aisément que cette limite est partout assurée.

5. — *Conditions de validité de la formule* (3).

Le champ de validité de la formule (3) est en réalité beaucoup plus large que le champ défini par les hypothèses *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Cette formule subsiste en réalité dans les conditions les plus générales pour lesquelles le second membre a un sens, c'est-à-dire lorsque la fonction J (M) existe et est sommable. La dé-

monstration conduit alors à considérer l'intégrale du second membre de (3) comme une fonction additive et absolument continue de l'ensemble V des points auxquels on l'étend. Dans ces conditions, la différence:

$$V' - \int_V J(M)\, d\omega_M$$

est aussi une fonction additive et absolument continue, dont la *dérivée sphérique centrée* est partout nulle. Le problème consiste à en déduire que cette fonction est nulle. Pour les éléments de la solution voir Lebesgue, Ann. Ec. Norm. 1910, et de La Vallée-Poussin, Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire, chap. IV.

6. *Conséquences de la formule* (3).

Reprenons nos hypothèses simplificatrices de la continuité de J (M); on déduit qu'il y aura nécessairement dans tout volume V des points où J (M) sera égale à $\frac{V'}{V}$ (résultat signalé par Darboux, dans des conditions plus particulières, et comparable à la formule des accroissements finis, dans le champ des fonctions monotones à dérivée continue). De ce fait, il résulte que la limite du rapport de deux volumes correspondants est J (M) lorsque le premier de ces volumes est infiniment voisin de M (sans plus).

Il n'y a alors aucune difficulté à déduire de ces résultats le théorème général de variance d'une intégrale multiple:

$$\int_{V'} g(P)\, d\omega_P = \int_V g(\mathcal{T}(M))\, J(M)\, d\omega_M \qquad (4)$$

théorème qui d'ailleurs a une signification physique intuitive et exprime la conservation de la masse par élément; lorsqu'on désigne par f (M) la densité de la matière qui existe au point M du volume V, par g (P) la densité qui règnera après la déformation, au point P correspondant de V', on aura nécessairement:

$$f(M)\, d\omega_M = g(P)\, d\omega_P$$

d'où:

$$f(\mathrm{M}) = g(\mathrm{P})\frac{d\omega_{\mathrm{P}}}{d\omega_{\mathrm{M}}} = g[\mathcal{T}(\mathrm{M})]\mathrm{J}(\mathrm{M}) .$$

Le fait que la limite J (M) est valable indépendamment de la forme des éléments de volume nous dispense d'insister sur la démonstration de la formule (4).

7. *Le théorème flux-divergence.*

Revenons aux champs vectoriels, ou, ce qui est équivalent, aux transformations infinitésimales. Nos hypothèses seront ici les suivantes:

a_1) Le champ est défini et continu dans une certaine région $\mathcal{R}$ [1].

c_1) Soit M un point fixe intérieur à $\mathcal{R}$, décrivons une sphère de centre M, de volume v et soit φ le flux du champ sortant de cette sphère. Le rapport $\frac{\varphi}{v}$ tend vers une limite quand v tend vers zéro: cette limite peut s'appeler *divergence sphérique centrée.*

d_1) $\frac{\varphi}{v}$ reste inférieur à un nombre fixe, cette limitation s'appliquant nécessairement à la divergence.

e_1) La divergence est une fonction continue de M.

Nous avons présenté ces hypothèses en les faisant correspondre très exactement aux hypothèses admises dans la démonstration de (3). Seulement ici, l'hypothèse b_1) disparaît: elle est remplie *ipso-facto* en vertu de la continuité du champ vectoriel.

L'hypothèse b) consistait en effet à exprimer qu'un volume sphérique correspond effectivement à un volume; l'hypothèse b_1) consistera donc en ce que, notre champ étant regardé comme un champ de vitesses, le volume du fluide contenu dans une sphère à l'instant t admet une dérivée par rapport à t. Or, cette dérivée est justement le flux du champ sortant de la sphère.

Soit donc le champ vectoriel $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M})$ satisfaisant aux hypothèses précédentes. Soit un volume Ω intérieur à la région $\mathcal{R}$ et limité par une ou plusieurs surfaces, possédant chacune un champ continu de normales, et dont l'ensemble sera désigné par Σ.

[1] Nous verrons un peu plus loin que l'hypothèse b_1) qu'on déduirait de b) est remplie *ipso facto.*

La masse du fluide qui occupe Ω à l'instant t a pour volume une certaine fonction du temps. Le théorème de variation du volume exprimé par la formule (3) nous apprend que cette fonction du temps a pour dérivée:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}\, d\omega \ .$$

D'autre part, on a également :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$$

$\vec{\nu}$ désignant le vecteur unité de la normale extérieure en un point de Σ. D'où le théorème flux divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\nu}\, d\omega = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \ . \tag{5}$$

En réalité, en conservant les mêmes hypothèses sur Σ, on pourrait montrer (a la base des résultats signalés sans démonstration au n° 5) que cette formule est valable dans des conditions beaucoup plus générales: il suffit de supposer l'existence et la sommabilité de div. $\vec{V}$.

8. *Application.*

Il est clair que tout ce que nous venons de dire dans le cas de l'espace à 3 dimensions s'applique, avec des modifications évidentes au cas où les vecteurs considérés appartiennent tous au même plan. Le jacobien sphérique centré par exemple, sera remplacé par un jacobien circulaire centré, et nous aurons la relation:

$$\int_{S} \operatorname{div} \vec{V} \cdot d\sigma = \int_{C} \vec{V} \cdot \vec{\nu}\, ds \tag{6}$$

C étant une courbe fermée à tangente continue sans point double, $\vec{\nu}$ la normale extérieure, $d\sigma$ l'élément d'aire.

Soit alors P (x, y), Q (x, y) deux fonctions données, $\vec{V}$ le vecteur de composantes Q et — P; il est clair que l'on a:

$$\int_{C} P\,dx + Q\,dy = \int_{C} \vec{V} \cdot \vec{\nu}\, ds \ .$$

Par suite, pour tout contour fermé à tangente continue sans point double C parcouru dans le sens direct:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_S \operatorname{div} \vec{V} \,.\, d\sigma \tag{7}$$

on en tire le théorème suivant, généralisation du théorème classique sur l'intégrale des différentielles exactes:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale curviligne

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

soit nulle le long de tout contour fermé sans point double est que la divergence circulaire centrée du vecteur : $\vec{x}Q - \vec{y}P$ *soit identiquement nulle dans la région du plan envisagée*[1].

D'après (7) cette condition est suffisante; elle est aussi nécessaire puisque le long de tout cercle de centre M l'intégrale

$$\int_C (\vec{x}Q - \vec{y}P) \,.\, \vec{\nu}\, ds$$

étant nulle par hypothèse, il en sera de même de son quotient par $\pi\rho^2$ quel que soit ρ; d'où existence en chaque point d'une divergence circulaire centrée nulle.

9. *Définition du rotationnel.*

Pour définir le rotationnel, nous poserons:

$$\operatorname{div} (\vec{V} \wedge \vec{u}) = \vec{u} \,.\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{V} \tag{8}$$

où $\vec{u}$ désigne un vecteur unitaire de direction quelconque, mais fixe [2]. On voit immédiatement que si les composantes de $\vec{V}$ ont des dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z, le rotationnel ainsi défini coïncide bien avec le rotationnel classique. Dans le

---

[1] L'énoncé suppose la continuité de la tangente. On pourrait d'ailleurs aisément, à la faveur d'un théorème de M. Lebesgue, étendre le résultat aux courbes rectifiables.

[2] Pareillement, on pourrait unifier la définition du gradient et de la divergence et aboutir à la notion de gradient sphérique centré en utilisant l'identité

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \varphi \,.\, \vec{u} = \operatorname{div} (\varphi \vec{u}).$$

cas contraire pour justifier la définition fournie par l'équation (8) il faut:

1° Que $\vec{V} \wedge \vec{u}$ ait une divergence (au sens généralisé défini plus haut).

2° Que (8) définisse alors bien un vecteur et un seul. Examinons le premier point: la condition énoncée sera remplie si l'intégrale:

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S (\vec{V} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \tag{9}$$

prise sur la sphère S de centre M et de rayon ρ admet une limite, quand ρ tend vers zéro, continue avec M, et reste inférieure quel que soit ρ à un nombre fixe Λ. Or, on peut écrire (9), en désignant par ϖ le volume de S:

$$\frac{\vec{u}}{\varpi}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma \tag{10}$$

Alors 1° sera satisfaite si la longueur du vecteur $\vec{W}(\rho, M)$

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma$$

reste inférieure à Λ quel que soit ρ et M, et si $\vec{W}$ tend vers une limite continue quand ρ tend vers zéro. On aura alors d'après (8), (9) et (10):

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\varpi}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma\ ; \tag{11}$$

cette relation (11) définit alors complètement le rotationnel et la condition 2° est bien remplie.

10. *Formule de Stokes.*

Nous allons montrer que l'existence et la continuité du rotationnel généralisé que nous venons de définir dans le paragraphe précédent suffisent pour assurer l'exactitude de la formule de Stokes:

$$\int_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \tag{12}$$

Σ étant une portion de surface admettant un champ de normales

continu, limité par une courbe fermée simple C admettant une tangente continue.

Nous allons commencer par établir (12) en prenant pour C un contour triangulaire A_1, A_2, A_3 : Σ sera alors la portion de plan intérieure à ce triangle, $\vec{v}$ sera un *vecteur fixe* $\vec{u}$ perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$ et tel que l'observateur disposé suivant $\vec{u}$ voit un mobile décrivant $A_1A_2A_3$ tourner dans le sens d'orientation des axes de coordonnées. Nous voulons calculer l'intégrale :

$$I = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} \,.\, \vec{u}\, d\sigma \;;$$

elle est, d'après (8) égale à :

$$\int_{\Sigma} \text{div}\, (\vec{V} \wedge \vec{u})\, d\sigma \;;$$

transformons cette intégrale de surface, en intégrale de volume à l'aide de l'artifice suivant : formons un prisme droit de bases (A'_1, A'_2, A'_3), (A_1, A_2, A_3) distantes d'une quantité infiniment petite l. Nous ferons de plus :

$$\overrightarrow{A'_1A_1} = \overrightarrow{A'_2A_2} = \overrightarrow{A'_3A_3} = \lambda^2 \vec{u} \;.$$

On a alors, à un infiniment petit près :

$$I = \frac{1}{l} \int_{\Omega} \text{div}\, (\vec{V} \wedge \vec{u})\, d\omega$$

Ω étant le domaine prismatique, $d\omega$ l'élément de volume. Mais le théorème flux-divergence nous donne :

$$I = \frac{1}{l} \int_{S} (\vec{V} \wedge \vec{u}) \,.\, \vec{v}\, dS$$

S étant la surface du prisme, $\vec{v}$ la normale extérieure à S. Mais on peut encore écrire :

$$I = \frac{1}{l} \int_{S} (\vec{u} \wedge \vec{v})\, \vec{V}\, dS \;.$$

Cette intégrale se scinde en 5 intégrales partielles étendues respectivement aux deux bases et aux trois faces latérales. Les deux premières sont nulles car on a alors:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (-\vec{u}) = 0 .$$

Considérons donc la portion I_1 de I relative à la face $A_1 A_2 A_2' A_1'$. Nous avons:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{A_1 A_2} .$$

D'autre part, soit $d\vec{M}$ un vecteur infiniment petit colinéaire et de même sens que $\overline{A_1 A_2}$. Nous avons:

$$dS = l . dM$$

et nous pouvons écrire, à un infiniment petit près:

$$I_1 = \int_{\overline{A_1 A_2}} \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{A_1 A_2} . \vec{V} . d\vec{M} .$$

ou encore:

$$I_1 = \int_{\overline{A_1 A_2}} \vec{V} . d\vec{M} .$$

En raisonnant de même pour I_1, I_2, I_3, on voit immédiatement que l'on a:

$$I = \int_C \vec{V} . d\vec{M}$$

C étant le contour $A_1 A_2 A_3$.

Il est alors facile d'établir la formule (12) pour toutes les surfaces Σ. En effet, en vertu des hypothèses relatives à la continuité du champ de normales à Σ et à celle du rotationnel on peut trouver une surface polyédrale Σ_n inscrite dans Σ, limitée par un contour Γ_n inscrit dans Γ telle que la différence

$$\left| \int_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} . \vec{v} . d\sigma - \int_{\Sigma_n} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} . \vec{v}_n . d\sigma_n \right|$$

tende vers zéro quand n augmente indéfiniment, ainsi que:

$$\left| \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} - \int_{\Gamma_n} \vec{V} \cdot d\vec{M}_n \right|$$

Or:

$$\int_{\Sigma_n} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{\nu}_n \, d\sigma_n = \int_{\Gamma_n} \vec{V} \cdot d\vec{M}_n \tag{13}$$

car il est clair que l'on a:

$$\int_{\Gamma_n} \vec{V} \cdot d\vec{M}_r = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{C_i} \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

C_i étant une face triangulaire quelconque de Σ_n, car tout côté appartenant à deux triangles à la fois de Σ_n sera parcouru dans les deux sens, et les intégrales de $\vec{V}.d\vec{M}$ correspondantes se détruiront; finalement il ne restera que les intégrales relatives aux côtés de la courbe limite Γ_n. On déduit alors immédiatement l'identité (12) de l'équation (13) en tenant compte de ce que nous avons dit plus haut. Le théorème de Stokes se trouve ainsi établi.

Remarque: La formule de Stokes montre que l'intégrale:

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

prise sur toute surface fermée Σ est identiquement nulle. On en déduit alors facilement que le champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V}$, défini par l'équation (11) admet partout une divergence qui satisfait à l'identité remarquable:

$$\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V}) = 0$$

comme dans le cas classique où les composantes de $\vec{V}$ auraient des dérivées des deux premiers ordres.

11. *Composantes du rotationnel.*

Nous allons établir le théorème fondamental suivant:

Soit le vecteur:

$$\vec{V} = \vec{x}\, P(x, y, z) + \vec{y}\, Q(x, y, z) + \vec{z}\, R(x, y, z)$$

et M (x_0, y_0, z_0) *un point quelconque de l'espace de coordonnées* (x_0, y_0, z_0). *Considérons les vecteurs:*

$$\overrightarrow{V_1} = \vec{y}\,R(x_0, y, z) - \vec{z}\,Q(x_0, y, z)$$
$$\overrightarrow{V_2} = \vec{z}\,P(x, y_0, z) - \vec{x}\,R(x, y_0, z)$$
$$\overrightarrow{V_3} = \vec{x}\,Q(x, y, z_0) - \vec{y}\,P(x, y, z_0)$$

chacun d'eux admet en M *une* DIVERGENCE CIRCULAIRE CENTRÉE, *et les valeurs de ces divergences sont respectivement égales aux composantes en* M *du rotationnel de* $\vec{V}$.

Le théorème est bien exact dans le cas où P, Q, R sont dérivables par rapport à (x, y, z); en effet ces divergences sont:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\,; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\,; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

Nous allons montrer qu'il est encore vrai dans le cas actuel plus général.

Soit C un cercle de centre M, de rayon ρ contenu dans le plan mené par M perpendiculairement à Ox.

La formule de Stokes nous donne:

$$\int_S \vec{\nu}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\,.\,d\sigma = \int_C \vec{V}\,.\,d\vec{M}\,.$$

Or:

$$\vec{\nu} = \vec{x}\,; \qquad \vec{V}\,.\,d\vec{M} = [\vec{y}\,Q(x_0, y, z) + \vec{z}\,R(x_0, y, z)]\,.\,d\vec{M}\,.$$

Soit $\vec{n}$ la normale au cercle C dirigée vers l'extérieur. On a facilement:

$$[\vec{y}\,Q(x_0, y, z) + \vec{z}\,R(x_0, y, z)]\,.\,d\vec{M} = [\vec{y}\,R(x_0, y, z) - \vec{z}\,Q(x_0, y, z)]\,\vec{n}\,ds,$$

s étant l'arc de C. On a donc:

$$\int_S \vec{x}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\,d\sigma = \int_C \vec{V}_1\,.\,\vec{n}\,ds$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$\vec{x}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\,\vec{V} + \frac{1}{S}\int_S \vec{x}\,.\,[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\,\vec{V}]\,d\sigma = \frac{1}{S}\int_C \vec{V}\,.\,\vec{u}\,ds\,.$$

L'expression:

$$\frac{1}{S}\int_S \vec{x}\,.\,[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\,\vec{V}]\,d\sigma$$

tend vers zéro quand le rayon du cercle C tend vers zéro; en effet, elle est plus petite que:

$$\frac{1}{S}\max_{\text{sur C}}|X - X_M|\int_S d\sigma = \max_{\text{sur C}}|X - X_M|$$

en désignant par X, Y, Z les composantes de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$. On a donc finalement:

$$X = \vec{x}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\,\vec{V} = \mathrm{div}_M\,\vec{V}_1$$
$$Y = \vec{y}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\,\vec{V} = \mathrm{div}_M\,\vec{V}_2$$
$$Z = \vec{z}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\,\vec{V} = \mathrm{div}_M\,\vec{V}_3$$

Nous écrirons encore ces équations:

$$X = \mathrm{div}_{(x)}\,\vec{V}$$
$$Y = \mathrm{div}_{(y)}\,\vec{V}$$
$$Z = \mathrm{div}_{(z)}\,\vec{V}$$

les symboles figurant dans les seconds membres ont une signification évidente d'après ce que nous avons dit plus haut. On a d'ailleurs:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_{(x)}\,\vec{V} &= \mathrm{div}\,(\vec{V}\wedge\vec{x}) \\ \mathrm{div}_{(y)}\,\vec{V} &= \mathrm{div}\,(\vec{V}\wedge\vec{y}) \\ \mathrm{div}_{(z)}\,\vec{V} &= \mathrm{div}\,(\vec{V}\wedge\vec{z}) \end{aligned} \qquad (14)$$

car, d'après la relation:

$$\mathrm{div}\,(\vec{V}\wedge\vec{u}) = \vec{u}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \qquad (8)'$$

dont nous sommes partis pour définir le rotationnel, on a bien:

$$X = \mathrm{div}\,(\vec{V}\wedge\vec{x})\ ; \qquad Y = \mathrm{div}\,(\vec{V}\wedge\vec{y})\ ; \qquad Z = \mathrm{div}\,(\vec{V}\wedge\vec{z})\ .$$

Remarquons en passant que l'existence de ces trois dernières divergences entraîne celle du rotationnel, en vertu de l'identité (8'). Nous allons de même établir la proposition suivante:

Si un champ vectoriel $\vec{V}$ *admet trois divergences partielles il admet aussi un rotationnel dont les composantes sont:*

$$X = \mathrm{div}_{(x)} \vec{V} \; ; \qquad Y = \mathrm{div}_{(y)} \vec{V} \; ; \qquad Z = \mathrm{div}_{(z)} \vec{V} \; .$$

D'après la remarque précédente il suffit d'établir que

$$\mathrm{div}\,(\vec{V} \wedge \vec{x}) \; , \qquad \mathrm{div}\,(\vec{V} \wedge \vec{y}) \; , \qquad \mathrm{div}\,(\vec{V} \wedge \vec{z})$$

existent et satisfont aux équations (14). Calculons donc div $(\vec{V} \wedge \vec{x})$. On a:

$$\vec{V} \wedge \vec{x} = \vec{y}\,R(x, y, z) - \vec{z}\,Q(x, y, z)$$

il faut calculer l'intégrale:

$$I = \int_{\Sigma} (\vec{y}\,R - \vec{z}\,Q) \,.\, \vec{\nu}\, d\sigma$$

étendu à la sphère Σ de centre M qui sera pris pour origine des axes de coordonnées, et de rayon ρ. Or:

$$\vec{\nu} = \lambda \vec{n} + \mu \vec{x}$$

en désignant par $\vec{n}$ la normale extérieure au cercle C_x intersection de la sphère Σ avec un plan d'abscisse x, perpendiculaire à Mx. On a:

$$\vec{\nu} \,.\, \vec{n} = \lambda = \frac{\sqrt{\rho^2 - x^2}}{\rho}$$

et:

$$I = \int_{\Sigma} \frac{\sqrt{\rho^2 - x^2}}{\rho} (\vec{y}\,R - \vec{z}\,Q) \,.\, \vec{n}\, d\sigma \; .$$

Or, en désignant par ds un élément de longueur du cercle C_x, nous pourrons écrire:

$$d\sigma = \frac{\rho\, dx\, ds}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

et nous avons l'identité suivante, facile à établir:

$$I = \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - x^2}}{\rho} \cdot \frac{\rho\, dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \int_{C_x} \vec{V}_1 \cdot \vec{n}\, ds \ .$$

Or:

$$\int_{C_x} \vec{V}_1 \cdot \vec{n}\, ds = \int_{S_x} \mathrm{div}_x \vec{V}\, dy\, dz$$

S_x désignant l'aire du cercle C_x. Il vient donc:

$$I = \int_{-\rho}^{+\rho} dx \int_{S_x} \mathrm{div}_x \vec{V}\, dy\, dz \ .$$

Passons aux coordonnées polaires, en posant:

$$y = r \cos\theta \ ; \qquad z = r \sin\theta$$

$$(0 \leq r \leq \sqrt{\rho^2 - x^2}) \ ; \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$\mathrm{div}_x \vec{V} = \varphi(x, y, z) \ .$$

Il vient alors:

$$I = \int_{-\rho}^{+\rho} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \varphi(x, r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr \ .$$

On a d'ailleurs par la formule de la moyenne:

$$\int_0^{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \varphi(x, r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr = \varphi(x, r_0 \cos\theta, r_0 \sin\theta) \int_0^{\sqrt{\rho^2 - x^2}} r\, dr$$

r_0 étant une certaine valeur de r comprise entre 0 et $\sqrt{\rho^2 - x^2}$. Finalement on voit que l'on peut écrire:

$$I = \varphi(x_0, r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0) \int_{-\rho}^{+\rho} \pi(\rho^2 - x^2)\, dx$$

ou:

$$I = \frac{4}{3} \pi \rho^3 \varphi(x_0, r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$$

avec:

$$|x_0| \leq \rho \qquad r_0 < \rho \ .$$

Donc le rapport de I au volume de la sphère Σ qui est égal à:

$$\varphi(x_0, r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$$

tend bien vers une limite égale à

$$\varphi(0, 0, 0)$$

d'après la continuité de φ. Or, cette limite n'est autre que la valeur de

$$\operatorname{div}(\vec{V} \wedge \vec{x})$$

au point M, et le théorème se trouve ainsi établi.

Application. — Soit l'expression:

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz ;$$

pour qu'elle représente la différentielle totale d'une fonction $F(x, y, z)$ *il faut et il suffit que le vecteur* $\vec{V}$ *de composantes* P, Q, R *ait un rotationnel identiquement nul.*

En effet, pour que ω soit une différentielle totale, il faut et il suffit que son intégrale le long de tout contour fermé soit nulle. Alors cela aura lieu en particulier le long de tout cercle Γ de centre $M(x, y_0, z_0)$ contenu dans le plan

$$x = x_0 .$$

Donc $\operatorname{div}_{(x)} \vec{V}$ existe et est nulle[1]; il en est de même pour $\operatorname{div}_{(y)} \vec{V}$, $\operatorname{div}_{(z)} \vec{V}$, et d'après ce que nous avons vu le vecteur $\vec{V}$ admet un rotationnel de composantes $\operatorname{div}_{(x)} \vec{V}$, $\operatorname{div}_{(y)} \vec{V}$, $\operatorname{div}_{(z)} \vec{V}$, identiquement nul.

Inversement si le rotationnel est nul, la Formule de Stokes montre que

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int \omega$$

est nulle le long de tout contour fermé sans points anguleux; cette dernière restriction pouvant être levée quand C ne présente

[1] On a en effet le long de Γ ;

$$\int_\Gamma \vec{V}.d\vec{M} = \int_\Gamma \vec{V}_1.\vec{n}\,ds$$

$\vec{n}$ étant le vecteur unité de la normale à Γ, $\vec{V}_1$ le vecteur: $\vec{y}\,R(x_0, y, z) - \vec{z}\,Q(x_0, y, z)$, déjà rencontré.

qu'un nombre fini de points anguleux grâce à l'artifice qui consiste à arrondir ces singularités; et cela suffit pour que ω soit la différentielle d'une fonction dF.

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

soit une différentielle totale est que l'on ait:

$$\mathrm{div}_{(x)}\vec{V} = 0\,, \qquad \mathrm{div}_{(y)}\vec{V} = 0\,; \qquad \mathrm{div}_{(z)}\vec{V} = 0\,.$$

12. *Conséquences du théorème flux-divergence généralisé.*

Pour terminer nous allons enfin indiquer quelques conséquences intéressantes que l'on peut tirer de la généralisation donnée par M. Bouligand du théorème flux-divergence. Plaçons-nous dans le cas du plan et soit Oxy un système d'axes orthogonal et normal. Donnons-nous une fonction $f(x)$ et considérons le vecteur:

$$\vec{x} f(x)$$

supposons qu'il admette une divergence circulaire centrée continue: Je dis alors que $f(x)$ admet une dérivée continue et que l'on a:

$$f'(x) = \mathrm{div}\,\vec{x} f(x)\,.$$

Soit en effet C le contour rectangulaire limité par les droites Ox, $x = x_0$, $y = a$, Oy. Nous avons S, étant le domaine de ce rectangle:

$$\int_S \mathrm{div}\,\vec{x} f(x) = \int_C f(x)\,\vec{x} \cdot \vec{\nu}\,ds\,.$$

Le long de Ox et du côté opposé à Ox, on a:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = 0$$

le long de la parallèle à Oy d'abscisse x_0:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = \vec{x} \cdot \vec{x} = 1$$

et le long de Oy:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = -\vec{x} \cdot \vec{x} = -1\,.$$

On a donc:

$$\int_C f(x)\,\vec{x}\,.\,\vec{\nu}\,ds = af(x_0) - af(0)\ .$$

Or:

$$\int_S \operatorname{div}\vec{x}\,f(x) = a\int_0^{x_0} \operatorname{div}\vec{x}\,f(x)\,dx$$

car div $\vec{x}\,f(x)$ dépend de x seul. On a donc :

$$f(x_0) - f(0) = \int_0^{x_0} \operatorname{div}\vec{x}\,f(x)\,dx$$

x_0 étant arbitraire, nous en tirons la conclusion annoncée. Ceci posé, soit Γ un cercle de centre $(x_0, 0)$ et de rayon ρ. Nous avons:

$$\operatorname{div}\vec{x}\,f(x) = \lim \frac{1}{\pi\rho^2}\int_\Gamma \vec{x}\,f(x)\,.\,\vec{\nu}\,ds\ .$$

Or:

$$\vec{\nu} = \frac{x - x_0}{\rho}\vec{x} + \frac{y - y_0}{\rho}\vec{y}\ .$$

Donc

$$\vec{x}\,.\,\vec{\nu} = \frac{x - x_0}{\rho} = \cos\alpha$$

et

$$ds = \rho\,d\alpha\ ;$$

donc

$$\operatorname{div} f(x)\,\vec{x} = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos\alpha)\cos\alpha\,d\alpha$$

et nous avons le théorème suivant:

Si f (x) *est telle que la quantité:*

$$\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} f(x + \rho\cos\alpha)\cos\alpha\,d\alpha$$

reste bornée en valeur absolue aussi petit soit ρ, *et tende vers une limite* φ(x) *continue quand* ρ *tend vers zéro, alors* f(x) *admet une dérivée continue égale à* φ(x).

On voit d'ailleurs facilement que si $f'(x)$ existe la quantité ci-dessus a une limite qui lui est égale. Il est clair que le théorème

ci-dessus est susceptible de nombreuses variantes, puisque pour définir le jacobien on peut prendre n'importe quelle courbe fermée sans points doubles entourant le point x et tendant vers lui.

Prenons en particulier un jacobien carré. Nous aurons à former la quantité:

$$\frac{f(x+\rho) - f(x-\rho)}{2\rho}$$

et l'on voit que si elle est bornée en valeur absolue et tend vers une limite continue quand ρ tend vers zéro, le quotient

$$\frac{f(x+\rho) - f(x)}{\rho}$$

qui définit la dérivée admet lui aussi une limite égale à la précédente.

Prenons encore un jacobien carré, mais en prenant le point x comme point de concours des diagonales, qui seront parallèles respectivement à Ox et à Oy, et l'on sera amené à faire les hypothèses énoncées plus haut sur l'expression remarquable:

$$\frac{1}{\rho^2}\left[\int_{x_0}^{x_0+\rho} f(x)\,dx - \int_{x_0-\rho}^{x_0} f(x)\,dx\right]$$

comme le montre un calcul facile.

Enfin, pour terminer, nous pouvons remarquer que rien ne nous obligeait à rester dans l'espace à 2 dimensions, et l'on pouvait par exemple considérer la divergence sphérique centrée de $\vec{x}\,f(x)$, c'est-à-dire :

$$\lim \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} \int_{\Sigma} f(x)\,\vec{x}\,.\,\vec{\nu}\,d\sigma$$

Σ étant une sphère de centre x et de rayon ρ. Un calcul facile permet d'écrire cette expression:

$$\lim_{\rho=0} \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi} f(x+\rho\cos\alpha)\,\sin 2\alpha\,d\alpha\,;$$

on en tire les mêmes conclusions que précédemment.