Conservation d'une forme de Pfaff

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

toutes ces variables) sont les solutions indépendantes d'un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles. Ces équations, indépendantes dans le cas général, sont obtenues en annulant les coefficients des arbitraires ξ, η, ξ', η', ... dans la variation δf d'une fonction de toutes les variables introduites (nous gardons le symbole δ pour les transformations prolongées). Il ne sera pas nécessaire d'écrire les équations de ce système, mais seulement de connaître le nombre des solutions; en opérant sur les équations des caractéristiques du système, on sera ramené à former les combinaisons $\delta f = 0$ par élimination de ξ, η, ξ', η', ... entre les équations donnant les variations de u, v, des coefficients, et de leurs dérivées.

On remarque qu'en dehors des constantes, aucune fonction de u, v seuls n'est invariante; on pourra donc faire abstraction de u et v au nombre des variables indépendantes en ne comptant pas plus, dans la suite, les équations $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ à satisfaire par tout invariant; autrement dit, on n'utilisera pas directement les équations (1).

Dans ces conditions, on obtient en général, jusqu'à l'ordre n [1], un système de $2(n+1)$ équations à $k\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ inconnues et ceci laisse prévoir l'existence de $\frac{n+1}{2}[k(n+2)-4]$ invariants jusqu'à l'ordre n inclus, dont $k(n+1)-2$ pour cet ordre.

Nous rencontrerons aussi des équations invariantes: dans une première étude, nous laisserons de côté tous les cas particuliers.

Conservation d'une forme de Pfaff.

6. — *Invariants et paramètres différentiels du cas général.* — Soit la forme de Pfaff

$$\varpi \equiv A(u, v)\,du + B(u, v)\,dv \tag{3}$$

à conserver par les transformations Σ; il faudra

$$\delta\varpi \equiv (\delta A - A\xi')\,du + (\delta B - B\eta')\,dv = 0$$
$$\delta A = A\xi' \qquad \delta B = B\eta' \tag{4}$$

[1] Comme il a été expliqué plus haut, l'ordre n que nous attribuons à un invariant est l'ordre de dérivation à partir des coefficients des formes ou équations différentielles qui interviennent (et nous ne traitons que des formes et équations du premier ordre).

soit 2 équations de condition pour les coefficients A, B. On prévoira donc $n\ (n+1)$ invariants jusqu'à l'ordre n, et $2n$ nouveaux pour cet ordre.

$A = 0$, $B = 0$, sont des équations invariantes; dans le cas général, $A \neq 0$, $B \neq 0$, nous poserons

$$A = e^a \qquad B = e^b$$

(e étant la base des logarithmes népériens, désignés par le symbole *log*).

En partant, pour l'ordre zéro, de

$$\delta a = \xi' \qquad \delta b = \eta' \qquad [\mathrm{I}, 0]$$

puis, utilisant les formules (2′) pour les dérivées partielles, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta a_{10} = a_{10}\xi' + \xi'' & \delta b_{01} = b_{01}\eta' + \eta'' \\ \delta b_{10} = b_{10}\xi' & \delta a_{01} = a_{01}\eta' \end{array}\right. \qquad [\mathrm{I}, 1]$$

d'où, si $a_{01} \neq 0$, $b_{10} \neq 0$, les deux invariants du premier ordre

$$\alpha = b_{10}e^{-a} \qquad \beta = a_{01}e^{-b} \qquad (5)$$

En modifiant la méthode de Lie par celle des paramètres différentiels de M. Tresse, nous introduirons les paramètres[1]

$$\vartheta_u f = f_{10}e^{-a} \qquad \vartheta_v f = f_{01}e^{-b} \qquad (6)$$
$$\alpha = \vartheta_u b \qquad \beta = \vartheta_v a$$

Nous substituerons alors aux deux dernières équations [I, 1] les suivantes

$$\delta\alpha = 0 \qquad \delta\beta = 0 \qquad [\mathrm{I}, 1']$$

utilisées à leur place dans les dérivations; le prolongement jusqu'au 2me ordre donne

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta a_{20} = 2a_{20}\xi' + a_{10}\xi'' + \xi''' & \delta b_{02} = 2b_{02}\eta' + b_{01}\eta'' + \eta''' \\ \delta\alpha_{10} = \alpha_{10}\xi' & \delta\alpha_{01} = \alpha_{01}\eta' \\ \delta\beta_{10} = \beta_{10}\xi' & \delta\beta_{01} = \beta_{01}\eta' \end{array}\right. \qquad [\mathrm{I}, 2]$$

[1] Nous définissons ici les opérateurs différentiels ϑ_u et ϑ_v appliqués à une fonction f, invariante ou non, et appelons paramètres différentiels de f les expressions $\vartheta_u f$ et $\vartheta_v f$; nous justifions au N° 13 qu'il y a bien là un procédé de formation d'invariants à partir d'un invariant f (ou de certaines autres expressions, comme a et b).

d'où les quatre invariants distincts d'ordre deux

$$\omega = \alpha_{10} e^{-a} \qquad \theta = \beta_{10} e^{-a} \qquad \varphi = \alpha_{01} e^{-b} \qquad \psi = \beta_{01} e^{-b} \tag{7}$$

$$\omega = \vartheta_u \alpha = \vartheta_u^2 b \qquad \theta = \vartheta_u \beta = \vartheta_u \vartheta_v a \qquad \varphi = \vartheta_v \alpha = \vartheta_v \vartheta_u b$$

$$\psi = \vartheta_v \beta = \vartheta_v^2 a$$

avec

$$\vartheta_i^2 = \vartheta_i \vartheta_i \, (i = u \, , \, v) \, .$$

7. — Pour le troisième ordre, nous substituerons aux quatre dernières équations [I, 2] les équations

$$\vartheta\omega = 0 \qquad \vartheta\theta = 0 \qquad \vartheta\varphi = 0 \qquad \vartheta\psi = 0 \qquad [\mathrm{I}, 2']$$

mais alors les dérivations donneront 10 équations au lieu de 8; le système complet obtenu aurait 8 équations à 22 inconnues au lieu des 8 équations à 20 inconnues devant fournir 12 invariants, dont 6 nouveaux; les 8 nouveaux invariants ainsi formés comme paramètres différentiels des précédents ne sont plus distincts, les paramètres d'ordre supérieur étant liés par les relations de structure, qui remplacent les égalités entre dérivées partielles différant seulement par la succession des dérivations. En effet, pour une fonction f

$$\vartheta_u \vartheta_v f = \left(f_{11} e^{-b} - b_{10} \vartheta_v f\right) e^{-a} \qquad \vartheta_v \vartheta_u f = \left(f_{11} e^{-a} - a_{01} \vartheta_u f\right) e^{-b} \tag{8}$$

$$(\vartheta_u \vartheta_v) f \equiv (\vartheta_u \vartheta_v - \vartheta_v \vartheta_u) f = \beta \vartheta_u f - \alpha \vartheta_v f \tag{9}$$

Si $\vartheta_u f$ et $\vartheta_v f$ sont des invariants, $\vartheta_v \vartheta_u f$ et $\vartheta_u \vartheta_v f$ ne sont donc pas distincts; on peut leur substituer l'expression symétrique

$$\frac{1}{2} (\vartheta_u \vartheta_v + \vartheta_v \vartheta_u) f = f_{11} e^{-(a+b)} - \frac{1}{2} (\alpha \vartheta_v f + \beta \vartheta_u f)$$

ou encore le paramètre différentiel du second ordre $\vartheta_{uv} f$

$$\vartheta_{uv} f = f_{11} e^{-(a+b)} \tag{10}$$

Pour les 6 invariants distincts du 3me ordre, on pourra choisir

$$\vartheta_u^2 \alpha \, , \; \vartheta_u^2 \beta \, , \; \vartheta_{uv} \alpha \, , \; \vartheta_{uv} \beta \, ; \; \vartheta_v^2 \alpha \, , \; \vartheta_v^2 \beta$$

Pour les ordres suivants, le calcul se continuera de même en ne conservant, des dérivées de a et b, que celles de la forme a_{no} et b_{on}, et substituant aux autres les dérivées premières des derniers invariants obtenus; ceci revient à l'emploi exclusif des paramètres différentiels qui, à partir de α et β, fournissent, dans le cas général, tous les invariants distincts d'ordre supérieur: nous dirons que les invariants du 1er ordre, α et β, sont les invariants *essentiels* de la forme ϖ.

8. — *Cas particuliers.* — Soit $B = 0$, par exemple; on rencontre alors, pour le 1er ordre, l'équation invariante $a_{01} = 0$: si cette équation est satisfaite, la forme $\varpi \equiv A(u)\,du$ n'a aucun invariant. Si $a_{01} \neq 0$, on pose $a_{01} = e^c$ et l'on rencontre, pour le 2me ordre, l'équation invariante $c_{10} = 0$, c'est-à-dire $a_{11} = 0$: si cette équation est vérifiée, la forme ϖ n'a de nouveau aucun invariant, et est du type $\varpi \equiv A_1(u)\,A_2(v)\,du$.

Si $c_{10} \neq 0$, on obtient au contraire l'invariant essentiel du 2me ordre

$$\gamma = c_{10}\,e^{-a} = \frac{a_{11}}{a_{01}}\,e^{-a} \tag{11}$$

puis, par l'emploi des paramètres différentiels $f_{10}\,e^{-a}$ et $f_{01}\,e^{-c}$ successivement les invariants d'ordre supérieur.

De même, dans le cas général, si on s'arrête à $a_{01} = b_{10} = 0$, la forme $\varpi \equiv A(u)\,du + B(v)\,dv$ n'a pas d'invariant; mais si une seule de ces équations est satisfaite, on obtiendra un invariant essentiel, à partir duquel les opérateurs différentiels ϑ_u et ϑ_v fournissent les autres.

On arrive donc rapidement, dans les cas particuliers, soit à une forme privée d'invariants, soit à la constitution des deux paramètres différentiels nécessaires et, plus ou moins tôt, à la formation d'invariants essentiels d'où découlent les autres; nous reviendrons d'ailleurs sur les procédés de formation des invariants.

9. — *Conditions suffisantes d'équivalence.* — Quand on sait former les invariants, généralement en nombre illimité, d'une forme ϖ, il reste à voir combien de ces invariants suffisent, par les relations qui les lient nécessairement, à caractériser une telle

forme vis-à-vis des transformations Σ; je dis que, dans le cas général, α, β, ω, θ, φ, ψ sont de tels invariants *suffisants*.

Supposons, en effet, que α et β soient des fonctions distinctes de u et v, et considérons le symbole δ comme affecté à la transformation infinitésimale d'un groupe qui, *a priori*, est formé de transformations *générales* Π. Imposons-nous les conditions, qui devront être compatibles

$$\delta\alpha = \delta\beta = 0 \tag{12}$$

$$\delta\omega = \delta\theta = \delta\varphi = \delta\psi = 0 \tag{13}$$

En développant les équations (13) en tenant compte de (7) et des formules (2), on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \delta\omega &= \omega(\xi_{10} - \delta a) + e^{b-a}\varphi\eta_{10} = 0 \\ \delta\theta &= \theta(\xi_{10} - \delta a) + e^{b-a}\psi\eta_{10} = 0 \\ \delta\varphi &= e^{a-b}\omega\xi_{01} + \varphi(\eta_{01} - \delta b) = 0 \\ \delta\psi &= e^{a-b}\theta\xi_{01} + \psi(\eta_{01} - \delta b) = 0 \end{aligned}\right. \tag{13'}$$

Le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(\alpha, \beta)}{D(u, v)} = e^{a+b}(\omega\psi - \theta\varphi)$ étant différent de zéro, ces équations donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\eta_{10} = \xi_{01} = 0 \\ &\delta a = \xi_{10} = \xi' \qquad \delta b = \eta_{01} = \eta' \end{aligned}\right. \tag{4'}$$

Donc les transformations Π se réduisent à des transformations Σ, par lesquelles la forme ϖ est bien conservée, puisque $\delta\varpi = 0$.

C.Q.F.D.

10. — Si α et β n'étaient pas indépendants, c'est-à-dire si

$$\omega\psi - \theta\varphi = 0 \tag{14}$$

cette équation étant jointe à l'une des équations (12), soit $\delta\alpha = 0$, les équations (13) se réduiraient à deux, par exemple $\delta\omega = 0$, $\delta\varphi = 0$. Il faudrait prolonger les conditions imposées par

$$\delta\vartheta_u\omega = \delta\vartheta_v\omega = 0 \tag{15}$$

qui, sous la réserve $\frac{D(\alpha, \omega)}{D(u, v)} \neq 0$, permettent à nouveau d'obtenir les équations (4'). Si $\frac{D(\alpha, \omega)}{D(u, v)} = 0$, $\frac{D(\alpha, \varphi)}{D(u, v)} \neq 0$, les équations en $\delta_u \varphi$ et $\delta_v \varphi$ remplaceront celles en $\delta_u \omega$ et $\delta_v \omega$.

Si l'on a simultanément

$$\frac{D(\alpha, \beta)}{D(u, v)} = 0 \qquad \frac{D(\alpha, \omega)}{D(u, v)} = 0 \qquad \frac{D(\alpha, \varphi)}{D(u, v)} = 0 \tag{16}$$

il en est de même de tous les déterminants fonctionnels formés pour deux invariants; tous les invariants sont donc fonctions d'un seul, soit α. On pourra, dans ce cas, adjoindre aux équations $\delta\alpha = 0$, $\delta\omega = 0$, $\delta\varphi = 0$, les conditions

$$\eta_{10} = \xi_{01} = 0$$

pour revenir aux conclusions précédentes.

Dans les cas particuliers du n° 8, on trouvera, en procédant de même, les conditions suffisantes qui caractérisent chaque cas.

11. — Les résultats précédents peuvent être présentés d'une façon un peu différente, qui dépend plutôt de l'identification directe de deux formes ϖ et $\bar{\varpi}$; si celles-ci sont équivalentes, les conditions nécessaires sont les égalités, chacun-à-chacun, des invariants distincts de tous les ordres, calculés pour les deux formes, et cette suite d'égalités constitue aussi les conditions suffisantes d'équivalence.

On voit, moyennant des hypothèses équivalentes à celles du numéro précédent, que certaines de ces égalités suffisent à entraîner toutes les autres.

Pour α et β fonctions distinctes de u, v ($\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ de $\bar{u}$, $\bar{v}$), ces conditions seront

$$\bar{\alpha} = \alpha \qquad \bar{\beta} = \beta \tag{17}$$

relations entre u, v, $\bar{u}$, $\bar{v}$ déterminant un nombre fini de correspondances, et

$$\bar{\omega} = \omega = \Omega(\alpha, \beta) \qquad \bar{\theta} = \theta = \Theta(\alpha, \beta) \qquad \bar{\varphi} = \varphi = \Phi(\alpha, \beta)$$
$$\bar{\psi} = \psi = \Psi(\alpha, \beta) \tag{18}$$

les fonctions Ω, Θ, Φ, Ψ ne pouvant d'ailleurs être choisies arbitrairement, mais ayant été calculées sur une des formes, ϖ par exemple, afin de satisfaire aux relations [1]

$$\left\{\begin{array}{l} (\vartheta_u \vartheta_v)\,\alpha \equiv \vartheta_u \varphi - \vartheta_v \omega = \beta\omega - \alpha\varphi \\ (\vartheta_u \vartheta_v)\,\beta \equiv \vartheta_u \psi - \vartheta_v \theta = \beta\theta - \alpha\psi \end{array}\right. \tag{19}$$

De même, dans le cas où α et β ne sont pas indépendants, il faut voir combien d'égalités entre invariants distincts de ϖ et $\bar{\varpi}$, compatibles en u, v, $\bar{u}$, $\bar{v}$, suffisent à entraîner les égalités entre les invariants correspondants suivants, et si ces égalités se réduisent à une ou deux indépendantes. Dans le dernier cas indiqué au n° 9, où les 6 invariants $\alpha, \beta, \omega, \theta, \varphi, \psi$ sont fonctions d'un seul, soit α, il en est de même de tous les invariants de ϖ, et les conditions suffisantes

$$\begin{array}{llll} \bar{\alpha} = \alpha & \bar{\beta} = \beta = \mathrm{B}(\alpha) & \bar{\omega} = \omega = \Omega(\alpha) & \bar{\theta} = \theta = \Theta(\alpha) \\ & \bar{\varphi} = \varphi = \Phi(\alpha) & \bar{\psi} = \psi = \Psi(\alpha) & \end{array} \tag{20}$$

assurent l'équivalence des deux formes ϖ et $\bar{\varpi}$ qu'on peut mettre en correspondance par une infinité de transformations Σ, définies par la seule relation $\bar{\alpha} = \alpha$; les fonctions Θ et Ψ sont d'ailleurs données ici par

$$\Theta(\alpha) = \frac{d\mathrm{B}}{d\alpha}\,\Omega(\alpha) \qquad \Psi(\alpha) = \frac{d\mathrm{B}}{d\alpha}\,\Phi(\alpha)\ . \tag{20'}$$

12. — *Méthode d'identification directe.* — L'exemple simple des formes de Pfaff va nous servir à montrer qu'en identifiant directement deux formes ϖ et $\bar{\varpi}$, supposées équivalentes, on peut obtenir de la même façon que par la méthode de Lie (qui ne nécessite cependant pas les équations finies des transformations), les procédés de formation des invariants et les conditions d'équi-

---

[1] La recherche des conditions suffisantes pose en réalité des problèmes distincts: 1°, reconnaître si deux formes données ϖ et $\bar{\varpi}$ sont équivalentes (Σ); 2°, étudier le système des équations intrinsèques (18) définissant une même classe de formes de Pfaff équivalentes (Σ), les fonctions Ω, Θ, Φ, Ψ, de α et β devant satisfaire aux équations aux dérivées partielles (19). Nous laissons de côté ce dernier problème, dont on pourrait aussi supposer une solution particulière connue.

Nous remarquerons encore qu'on peut parfois intervertir le rôle des invariants d'ordre inférieur α, β et de deux autres des invariants utilisés.

valence. Nous partons ici des équations de transformation (Σ) et de l'identité

$$\overline{\varpi} \equiv \overline{A}(\overline{u}, \overline{v})\, d\overline{u} + \overline{B}(\overline{u}, \overline{v})\, d\overline{v} = A(u, v)\, du + B(u, v)\, dv \equiv \varpi$$

En substituant aussi

$$d\overline{u} = U' du \qquad d\overline{v} = V' dv \tag{21}$$

on obtient

$$A = \overline{A} U' \qquad B = \overline{B} V' \tag{22}$$

ou, dans le cas général

$$e^a = e^{\overline{a}} U' \qquad e^b = e^{\overline{b}} V' \qquad [I', 0]$$

Il s'agit, par les dérivations successives de ces relations, et les éliminations de U', V', et leurs dérivées, d'obtenir les expressions en a, b, et leurs dérivées partielles (u, v, n'intervenant pas directement) égales aux expressions correspondantes formées pour $\overline{\varpi}$, qui constituent les invariants cherchés. On a d'abord

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{10} = \overline{a}_{(10)} U' + (\log U')' & b_{01} = \overline{b}_{(01)} V' + (\log V')' \\ b_{10} = \overline{b}_{(10)} U' & a_{01} = \overline{a}_{(01)} V' \end{array}\right. \qquad [I' 1]$$

d'où, en éliminant U' et V' entre les équations [I', 0] et les deux dernières équations [I', 1]

$$\alpha = b_{10} e^{-a} = \frac{B_{10}}{AB} \qquad \beta = a_{01} e^{-b} = \frac{A_{01}}{AB} \tag{5'}$$

En substituant aux dernières équations [I', 1]

$$\alpha = \overline{\alpha} \qquad \beta = \overline{\beta} \qquad [I', 1']$$

et poursuivant les dérivations, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{20} = \overline{a}_{(20)} U'^2 + \overline{a}_{(10)} U'' + (\log U')'' & b_{02} = \overline{b}_{(02)} V'^2 + \overline{b}_{(01)} V'' + (\log V')'' \\ \alpha_{10} = \overline{\alpha}_{(10)} U' & \alpha_{01} = \overline{\alpha}_{(01)} V' \\ \beta_{10} = \overline{\beta}_{(10)} U' & \beta_{01} = \overline{\beta}_{(01)} V' \end{array}\right. \qquad [I', 2]$$

puis, en éliminant de nouveau U', V' avec les équations [I', 0] on retrouve les invariants distincts du 2me ordre $\omega, \theta, \varphi, \psi$. On

substituera ensuite comme précédemment aux quatre dernières équations [I', 2]

$$\omega = \bar{\omega} \qquad \theta = \bar{\theta} \qquad \varphi = \bar{\varphi}, \qquad \psi = \bar{\psi} \qquad [\mathrm{I}', 2']$$

et on tiendra compte des relations entre les dérivées de ces équations, exactement comme au n° 7. Dans les deux méthodes, on compte de la même façon les invariants distincts des différents ordres; dans la méthode de Lie comme dans celle-ci, on ne fait que des combinaisons linéaires des équations obtenues auparavant, en particulier pour obtenir les combinaisons intégrables des systèmes complets; on se ramène donc toujours à des problèmes d'élimination.

La discussion des cas particuliers se fait de même; celle des conditions suffisantes d'équivalence peut aussi se faire comme aux n°s 9 et 10, en partant directement ici de deux formes ϖ et $\bar{\varpi}$.

13. — *Formation et interprétation des invariants.* — Dans la méthode des paramètres différentiels, on peut utiliser d'abord différents paramètres linéaires, puis, à partir d'eux, en former d'ordre supérieur servant aussi à construire les invariants. La méthode d'identification directe met de même en évidence divers procédés de formation des invariants; à côté des invariants *absolus* on est amené à considérer des expressions qui, dans une transformation, sont reproduites à un facteur près, dépendant des arbitraires de la transformation.

Nous réserverons le nom d'invariants *relatifs* (comme en géométrie projective) aux expressions pour lesquelles ce facteur est une puissance du déterminant de la transformation, l'exposant de cette puissance étant le poids de l'invariant. Les transformations Σ_1 et Σ_2 intervenant pour former les transformations Σ, nous considérerons des invariants relatifs (Σ_1), (Σ_2), (Σ), de poids p, soient des expressions r_1, r_2, r, satisfaisant respectivement à

$$\bar{r}_1 = \mathrm{U}'^p r_1 \qquad \bar{r}_2 = \mathrm{V}'^p r_2 \qquad \bar{r} = (\mathrm{U}'\mathrm{V}')^p r \qquad (23)$$

et caractérisées dans la méthode de Lie par

$$\delta r_1 = -pr_1\xi' \qquad \delta r_2 = -pr_2\eta' \qquad \delta r = -pr(\xi' + \eta') \qquad (23')$$

Le produit de deux invariants relatifs, (Σ_1) et (Σ_2), de poids p, est un invariant relatif (Σ) de même poids; le rapport de deux invariants relatifs du même groupe et de même poids est un invariant (Σ) absolu.

Nous considérerons aussi des formes différentielles invariantes ou covariantes relatives, ces dernières caractérisées par leur poids; ainsi du et dv sont des comitants relatifs, (Σ_1) et (Σ_2), de poids $(+1)$, A et B des invariants relatifs (Σ_1) et (Σ_2) de poids (-1): d'où les formes invariantes $A du$ et $B dv$, conservées séparément, ainsi que, par exemple, la forme quadratique $AB du dv$ et la forme extérieure $AB\,[du dv]$, élément de l'invariant intégral $\int\int AB\,[du\,dv]$.

Tout invariant ou comitant (Π) est nécessairement invariant ou comitant (Σ); ainsi de $A du$ et $B dv$, on déduit les covariants bilinéaires

$$[dA\,du] = -A_{01}\,[du\,dv] \qquad [dB\,dv] = B_{10}\,[du\,dv]$$

et les invariants intégraux correspondants; d'où aussi les invariants α et β, et la condition $\alpha = \beta$ exprime que la forme ϖ est une différentielle exacte[1]. Un invariant f donnera les invariants relatifs f_{10} et f_{01}, respectivement (Σ_1) et (Σ_2), de poids (-1), puis les paramètres différentiels $\frac{f_{10}}{A}$ et $\frac{f_{01}}{B}$ seront de nouveaux invariants; on peut encore partir des formes invariantes $f_{10}\,du$ et $f_{01}\,dv$. De même, les formes quadratiques de différentielles donnent comme invariants les courbures de Gauss; etc. Dans les invariants déduits de f, citons $\frac{f_{10}f_{01}}{AB}$ et $\frac{f_{11}}{AB}$; à partir de deux invariants f et g, on aura $\frac{f_{10}g_{01} + f_{01}g_{10}}{AB}$ et $\frac{f_{10}g_{01} - f_{01}g_{10}}{AB}$: dans les théories géométriques, on rattachera ces invariants aux paramètres différentiels du plan et de la théorie des surfaces.

Les relations entre les diverses méthodes étant suffisamment établies, nous ferons surtout usage, dans la suite, de la méthode de Lie et des paramètres différentiels.

---

[1] Le covariant bilinéaire d'une forme ϖ est en effet

$$\varpi' = (B_{10} - A_{01})\,[du\,dv] = AB\,(\alpha - \beta)\,[du\,dv]$$