SUR LE THÉORÈME DE M. PICARD

Autor(en): **Valiron, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22592

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LE THÉORÈME DE M. PICARD

PAR

Georges VALIRON (Strasbourg).

1. — Dans son beau Livre sur *Les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, M. Montel, après avoir montré (p. 80 et p. 125) qu'il n'existe pas de couples de fonctions entières X, Y vérifiant l'identité

$$X^m + Y^n \equiv 1 \tag{1}$$

lorsque les entiers m et n satisfont à la condition

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1 , \tag{2}$$

signale qu'il serait intéressant de démontrer cette impossibilité de façon élémentaire. On peut remarquer que, lorsque le genre de la relation (1) est supérieur à 1, la démonstration du théorème de M. Picard sur l'impossibilité de l'uniformisation de cette relation au moyen de fonctions entières, donnée par M. A. Bloch [1], répond au desideratum de M. Montel. Dans les trois cas elliptiques: $m = 2$, $n = 3$; $n = 2$, $m = 4$; $m = n = 3$, le théorème établi par M. Montel à la page 256 de son ouvrage résout la question d'une façon moins directe. Je voudrais montrer ici que la méthode de M. Bloch permet, dans tous les cas, de présenter les choses d'une façon excessivement simple en ne faisant appel qu'aux considérations les plus élémentaires de prolongement analytique. On s'appuie sur le théorème de M. Bloch qui joue un

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3me série, t. XVII, 1925.

rôle fondamental dans toutes ces questions et qui se démontre en quelques lignes [1]:

I. *Si une fonction est holomorphe dans un cercle de rayon* 1 *et si sa dérivée est égale à* 1 *au centre du cercle, le domaine décrit par les valeurs de la fonction contient un cercle à un seul feuillet de rayon supérieur à une constante absolue* B.

On peut appliquer ce théorème à une fonction holomorphe autour du point à l'infini mais admettant ce point pour point essentiel ou pour pôle: on prend un cercle de rayon A très grand ayant pour centre un point où la dérivée a son module supérieur à un nombre positif c. La fonction inverse est holomorphe dans un cercle de rayon au moins égal à cAB. En particulier,

II. *La fonction inverse d'une fonction entière possède des cercles d'holomorphie de rayon aussi grand que l'on veut.*

Ceci rappelé, revenons à l'identité (1). En dérivant, conformément à la méthode de M. Borel, nous obtenons

$$m\,X^{m-1}\,X' + n\,Y^{n-1}\,Y' \equiv 0$$

et, puisque les fonctions entières X et Y n'ont pas de zéros communs, la fonction

$$\frac{X'}{Y^{n-1}} = \frac{X'}{(1 - X^m)^{\frac{n-1}{n}}} \tag{3}$$

est une fonction entière. On a donc

$$\int (1 - X^m)^{\frac{1}{n}-1}\,dX = g(z)\ ,$$

$g(z)$ étant une fonction entière ou un polynome mais non pas une constante. Par suite

$$X = H(g(z))\ ,$$

H (u) désignant une branche de la fonction inverse de

$$u = \int (1 - x^m)^{\frac{1}{n}-1}\,dx \tag{4}$$

[1] Voir G. VALIRON, *Comptes Rendus*, t. 183, 1926, p. 728, et E. LANDAU, *Berliner Akad.*, 1926, p. 467.

prolongée en suivant les valeurs de $g(z)$. Or l'intégrale (4) est de première espèce en vertu de (2); l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} (1 - x^m)^{\frac{1}{n} - 1} dx$$

calculée le long de la demi-droite qui prolonge le segment (o, x_0) est bornée; son module est au plus égal à

$$\int_0^1 (1 - x^m)^{\frac{1}{n} - 1} dx + \int_1^{\infty} (x^m - 1)^{\frac{1}{n} - 1} dx = C(m, n) .$$

Si donc u_0 est une valeur prise par u et si C' est un nombre supérieur à $C(m, n)$, il existe un chemin appartenant au cercle $| u - u_0 | < C'$ sur lequel $| H(u) |$ tend vers l'infini lorsqu'on s'approche de l'extrémité du chemin. Mais d'après le théorème II, il existe un point z_0 tel que lorsque z décrit un domaine fini D contenant ce point, le point $u = g(z)$ décrit un cercle $| u - u_0 | < C'$ qui correspond biunivoquement à D. Il existerait donc dans D des points où $H(g(z))$ dépasserait tout nombre donné, ce qui est impossible.

2. — La démonstration précédente ne s'étend pas sans modification au cas où X et Y sont seulement supposées holomorphes autour du point à l'infini qui est point essentiel. L'expression (3) est alors holomorphe autour du point à l'infini, mais il faut montrer que ce point ne peut être un zéro. Supposons que ce point soit pôle au plus et soit $a_p z^p$ le terme de plus haut degré du développement de Laurent. Pour les grandes valeurs de $| z |$, (3) sera asymptotiquement égal à ce terme. En désignant alors par $M^1(r)$ et $M(r)$ les maxima de $| X' |$ et $| X |$ sur la circonférence $| z | = r$, on aura

$$| a_p | < K r^{-p} M^1(r) [M(r)]^{-\gamma} , \qquad \gamma = m - \frac{m}{n} > 1 .$$

D'après un théorème de M. Borel (voir n° 3), le second membre de cette inégalité peut être aussi petit que l'on veut pourvu que r soit convenablement choisi, a_p serait donc nul.

$g(z)$ est donc ici de la forme

$$a \log z + G(z) ,$$

$G(z)$ étant encore holomorphe autour du point à l'infini qui est point essentiel. Le théorème II s'applique encore à une telle fonction et la démonstration précédente s'achève alors sans difficultés.

En appliquant la démonstration du n° 1 en supposant seulement X et Y holomorphes pour $|z| < R$, on obtient une limitation supérieure de R en fonction de $X(o)$ et $X'(o)$. Les résultats obtenus ici contiennent évidemment le théorème de M. Picard sur les fonctions holomorphes autour d'une singularité essentielle et le théorème classique de M. Landau.

3. — Au sujet de la relation entre les fonctions $M^1(r)$ et $M(r)$ qui conduit au résultat employé ci-dessus, je démontrerai une proposition que je me suis borné à énoncer dans le Mémorial des Sciences mathématiques (fasc. II, p. 6). On peut évidemment se borner au cas d'une fonction entière $f(z)$. $M^1(r)$ et $M(r)$ étant les maxima de $|f'(z)|$ et $|f(z)|$ pour $|z| = r$, le théorème de Cauchy donne

$$M^1(r) < M(R) \frac{1}{R - r} . \qquad (R > r)$$

En s'appuyant sur les propriétés des fonctions croissantes, M. Borel a montré *(Leçons sur les fonctions entières)* que, si petit que soit le nombre positif α, le second membre de cette inégalité est inférieur à $[M(r)]^{1+\alpha}$ sauf dans certains intervalles. C'est ce résultat que nous avons utilisé au n° 2.

Supposons ici que $f(z)$ soit d'ordre fini ρ. On a, à partir d'une valeur $r(\varepsilon)$ de r,

$$\log M(r) < r^{\rho+\varepsilon}$$

et, puisque d'après M. Hadamard, $\log M(r)$ est une fonction convexe de $\log r$, on peut écrire

$$\log M(r) < \log M(r_0) + \int_{r_0}^{r} U(x) \frac{dx}{x} ,$$

U (x) étant croissante. On en déduit sans peine que, à partir d'une valeur r, on a aussi

$$U(x) < x^{\varrho+\varepsilon}$$

et

$$\log M(R) < \log M(r) + R^{\varrho+\varepsilon} \log \frac{R}{r} ,$$

donc

$$\log M^1(r) < \log M(r) + R^{\varrho+\varepsilon} \log \frac{R}{r} + \log \frac{1}{R-r} .$$

En prenant

$$R = r + r^{1-\varrho-\varepsilon} ,$$

on obtient

$$\log M^1(r) < \log M(r) + \log r^{\varrho-1+\varepsilon} + K ,$$

K étant fini. Par suite, *si petit que soit* ε, *on a, à partir d'une valeur de* r

$$M^1(r) < r^{\varrho-1+\varepsilon} M(r) .$$

C'est l'inégalité que je voulais établir.

SUR LES SURFACES DE NIVEAU DU POTENTIEL

PAR

William Brunner (Zurich).

Soit S_1 *une surface fermée entourant le point* O *et* S_2 *une autre surface fermée entourant* S_1. *Supposons que* S_1 *et* S_2 *soient des surfaces de niveau de la fonction harmonique* U (x, y, z), *régulière dans la partie de l'espace comprise entre* S_1 *et* S_2. *Si* S_1 *et* S_2 *jouissent de la propriété qu'une demi-droite quelconque issue du point* O *ne les coupe qu'une fois, toutes les surfaces de niveau de* U *comprises entre* S_1 *et* S_2 *jouissent de la même propriété* [1].

[1] Les surfaces jouissant de ladite propriété s'appellent « sternförmig » en allemand. Le théorème analogue pour le cas du plan (potentiel logarithmique) est bien connu, voir par ex. G. Pólya et G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze* I (1925), p. 145. Le théorème énoncé m'a été indiqué sans démonstration par M. G. Pólya, à l'occasion de mon travail de diplôme, ensemble avec un autre analogue, relatif aux surfaces de niveau convexes.