Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Rolf Nevanlinna. — Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions méromorphes (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de VIII-174 pages. Prix: 35 francs. Gauthier-Villars & Cie Paris 1929.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

vis d'Archimède. L'artiste a-t-il voulu attirer l'attention sur la machine, sur le rôle de l'esclave ou sur tout un décor assez compliqué ? Les réflexions que l'on peut faire sur ces sujets sont toutes pleines d'intérêt.

A. Buhl (Toulouse).

Louis Roy. — **Problèmes de Statique graphique et de Résistance des matériaux,** à l'usage des Elèves de l'Institut électrotechnique et de Mécanique appliquée et des Candidats au Certificat de Mécanique appliquée. — Un volume de viii-118 pages, 48 figures et quatre planches. Prix: 30 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris. 1929.

M. Louis Roy, indépendamment de ses travaux scientifiques proprement dits qui en font un continuateur des Duhem et des Boussinesq, s'est voué, avec un égal bonheur, à l'enseignement de la Mécanique considérée plus particulièrement quant aux réalisations techniques relevant de l'Art de l'ingénieur. D'où, tout d'abord, deux volumes, consacrés l'un à la Mécanique rationnelle généralement adjointe aux Mathématiques générales, l'autre à la Statique graphique et à la Résistance des Matériaux. Ces ouvrages ont été analysés ici-même (T. XXII, 1921-22, pp. 92 et 232). C'est le second qui est illustré maintenant par des *Problèmes* formant un recueil très suggestif car, si les exercices ainsi assemblés sont, considérés en eux-mêmes, plutôt élémentaires, l'assemblage est propre à forcer l'attention sur tous les principes essentiels d'une science délicate dont la pratique implique souvent de redoutables responsabilités. De plus, l'esprit d'un véritable savant n'est nullement superflu pour insérer convenablement l'élémentaire dans une discipline qui tient malgré tout aux équations générales de la théorie élastique et recèle ainsi de nombreuses et grandes difficultés.

Il est évidemment impossible d'analyser ici les 46 problèmes de l'ouvrage. Les 16 premiers forment trois chapitres de Statique graphique; les autres ont trait aux déformations les plus diverses, aux poutres, aux potences, aux arcs chargés, aux phénomènes de flambement qu'il faut savoir éviter de manière aussi élégante et économique que possible, notamment sans trop augmenter l'épaisseur des pièces. L'un de ces exercices contient une formule relative à la flexion des tubes de télescope; cette formule a été étudiée sur un télescope réel, habituellement manié par l'auteur. Beaucoup d'autres questions se rapportent à des expériences faites ou pouvant aisément être faites dans un Institut de Mécanique tel que celui de l'Université de Toulouse. L'ouvrage est très original et très consciencieux; les calculs numériques y sont toujours terminés. S'il a été publié à la demande des élèves immédiats de M. Louis Roy, nul doute qu'il ne s'impose partout par son utilité et son intérêt.

A. Buhl (Toulouse).

Rolf Nevanlinna. — **Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions méromorphes** (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de viii-174 pages. Prix: 35 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris. 1929.

Il s'agit ici d'extensions, à la théorie des fonctions méromorphes, de théorèmes célèbres découverts d'abord dans la théorie des fonctions entières. L'instrument fondamental de recherche est la formule de Poisson-Jensen

qui permet de calculer le module d'une fonction méromorphe dans un cercle lorsque l'on connaît ses valeurs sur la circonférence ainsi que ses zéros et ses pôles intérieurs au cercle. M. Rolf Nevanlinna a tenu à commencer par le commencement; il déduit la formule de Poisson-Jensen de la formule de Green. Plus antérieurement encore on pourrait déduire la formule de Green de l'identité qui existe entre l'intégrale simple de XdY étendue à un contour fermé C et l'intégrale double de $dX\,dY$ relative à l'étendue contenue dans C. C'est le point de vue avec lequel j'ai abordé les Formules stokiennes, le Calcul différentiel absolu, les Groupes, ...; que ne contient-il pas ?

Venons à l'équation $f(x) = z$ quand f est une fonction méromorphe; il s'agit surtout d'étudier l'existence et la distribution des racines pour diverses valeurs de z. Deux expressions $N(r, z)$ et $m(r, z)$, immédiatement associables à la formule de Jensen, sont relatives, l'une à la densité des racines de $f = z$ au voisinage du point à l'infini, l'autre à une certaine valeur logarithmique moyenne sur la circonférence $|x| = r$. Un premier théorème fondamental (p. 12) lie N et m à une fonction $T(r, f)$ croissante et convexe de $\log r$. Notamment, pour $m + N$ borné, avec r infini, f se réduit à une constante.

D'autres expressions M et n s'adjoignent bientôt aux précédentes et permettent de généraliser les théorèmes de M. Hadamard sur la croissance des fonctions entières; du même coup, la notion d'*ordre* s'étend à une fonction méromorphe. Il est entendu que toute fonction méromorphe est le quotient de deux fonctions entières; on voit bientôt (p. 39) des hypothèses permettant de réaliser immédiatement cette construction. La notion de *genre* s'étend bientôt aussi et tout ceci ne va pas sans considérations générales sur les produits canoniques, considérations attachées aux beaux travaux de M. Valiron.

Le chapitre consacré au « Second théorème fondamental » est certainement celui dont l'étude est la plus laborieuse. Les théorèmes initiaux de MM. Hadamard et Borel y sont remplacés par un lemme donnant une limite supérieure de la valeur moyenne qui mesure l'intensité de la convergence vers l'infini de la dérivée logarithmique de la fonction méromorphe donnée. On revient d'ailleurs, dans cet ordre d'idées, à la somme $m + N$. L'union de la *valeur exceptionnelle* à la *valeur asymptotique* conduit à la courbe continue allant à l'infini et telle que la fonction tende vers la valeur considérée lorsque x s'éloigne indéfiniment en suivant cette courbe. On sait aujourd'hui rechercher, de façon naturelle et méthodique, les circonstances qui semblèrent si paradoxales lorsque Mittag-Leffler annonça la construction de fonctions entières finies à l'infini le long de tous les rayons issus de l'origine. Seulement, depuis, les méthodes ont bien changé et c'est avec quelque mélancolie que l'on constate que le nom de Mittag-Leffler ne figure pas dans la Bibliographie terminant l'ouvrage; on y trouve, il est vrai, celui de A. Wiman, l'un de ses disciples les plus directs.

Bornons-nous à mentionner les deux derniers Chapitres sur les « Fonctions méromorphes liées par une relation linéaire » et sur les « Fonctions méromorphes dans un cercle fini ». Une note « Sur l'emploi de certaines fonctions automorphes » montre que les idées initiales de M. Emile Picard ont gardé toute leur fécondité malgré l'extrême diversité des recherches ultérieures. Ceci semble être aussi l'opinion donnée par M. G. Julia dans ses *Leçons sur les Fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé.*

Revenons à la Bibliographie des dernières pages; elle est de première valeur, elle n'oublie point des jeunes tels MM. A. Bloch et H. Milloux, elle aurait pu être un peu plus complète encore en citant notamment la belle thèse de M. Henri Cartan *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires*, thèse qui semble étroitement apparentée à ce qui précède, s'inspire constamment des méthodes de MM. F. et R. Nevanlinna et s'appuie ainsi sur la formule de Jensen. Mais, bien que l'ouvrage de M. Rolf Nevanlinna porte 1929 comme date de publication, le savant auteur a arrêté son travail en novembre 1927, comme il est indiqué à la fin de la Préface, et la thèse de M. Henri Cartan est de 1928. Ma remarque ne s'inspire donc que du plaisir de signaler une belle adjonction à une exposition, des plus suggestives, qui en entraînera sans doute bien d'autres.

A. Buhl (Toulouse).

N.-E. Nörlund. — **Leçons sur les Equations linéaires aux différences finies,** rédigées par René Lagrange (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de vi-153 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris. 1929.

M. Nörlund jouit, quant au Calcul des Différences, d'une célébrité bien méritée. Nous avons déjà analysé (T. XXV, 1926, p. 145) ses *Vorlesungen über Differenzenrechnung* et (T. XXVI, 1927, p. 338) son fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques* intitulé *Sur la « Somme » d'une fonction.*

Il y a là une analyse du discontinu qui se ramène au continu, aux solutions analytiques, aux séries de « facultés » remontant à Laplace et même aux fractions dites *continues*. Henri Poincaré et Salvatore Pincherle s'y sont grandement intéressés; G. D. Birkhoff et R. D. Carmichael ont donné des méthodes d'approximations successives donnant aux équations aux différences une importance analogue à celle que de telles méthodes ont donné aux équations différentielles ordinaires. C'est ainsi que le présent ouvrage commence par étudier l'existence des solutions, les systèmes *fondamentaux* que forment celles-ci quand elles ne sont point liées par de certaines relations linéaires à coefficients *périodiques*, les conditions d'analyticité et même de méromorphie quand l'équation initiale est à coefficients rationnels. Les équations linéaires aux différences admettent d'ailleurs une équation *adjointe;* on les traite aisément avec second membre quand elles sont d'abord résolues sans celui-ci; on abaisse leur ordre quand on connaît des solutions et les séries de facultés sont justement ce qui permet de faire, pour les équations en litige, une théorie analogue à celle de Fuchs et Frobenius. Quant aux termes des séries de facultés ce sont des quotients de fonctions Γ, si bien que la fonction Γ qui, rappelons-le, ne satisfait à aucune équation différentielle ordinaire à coefficients algébriques, apparaît, par contre, comme l'instrument fondamental de la théorie des équations aux différences finies.

Un premier grand théorème (p. 44) nous montre qu'il y a *des séries de séries* de facultés dépendant de constantes ρ_s racines d'une équation déterminante, avec des facteurs contenant x et ρ_s et des dérivées partielles d'aspect taylorien en ρ_s, ces séries de séries étant propres à représenter