SUR LE GROUPE DU COMPLEXE QUADRATIQUE GÉNÉRAL

Autor(en): **Bouligand, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22598

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LE GROUPE DU COMPLEXE QUADRATIQUE GÉNÉRAL

PAR

M. Georges BOULIGAND (Poitiers).

---

1. — Dans une publication récente sur la Géométrie réglée [1], prolongeant mon *Cours de Géométrie analytique* [2] et s'inspirant de ses méthodes, j'ai montré, en suivant F. KLEIN, que l'étude d'un complexe quadratique général

$$f(a, b, c, l, m, n) = 0$$

(a, b, c, l, m, n désignant les coordonnées plückeriennes d'une droite et f une forme quadratique homogène) équivaut à celle du faisceau de quadriques, défini dans un espace projectif auxiliaire à cinq dimensions, lieu du point de coordonnées homogènes a, b, c, l, m, n, par l'équation

$$f(a, b, c, l, m, n) + \rho(la + mb + nc) = 0 .$$

De l'existence d'un système de six points, deux à deux conjugués relativement à ces quadriques, résulte celle d'un système de six complexes linéaires, deux à deux *en involution* (c'est-à-dire tels que chacun d'eux reste invariant par la corrélation attachée à l'un des cinq autres), et dont les corrélations conservent le complexe $f = 0$.

Les corrélations de ces six complexes, prises comme opérations fondamentales, donnent naissance à un groupe fini, dont la considération systématique éclaire la théorie du complexe quadratique général. Le présent article, purement didactique, est destiné à mettre en évidence les propriétés essentielles de ce

---

1 *Notions sur la Géométrie réglée et sur la théorie du complexe quadratique.* Paris, Vuibert, 1929. [Voir, plus loin, la Bibliographie, p. 337-339. *N. de la R.*]

2 Seconde édition. Paris, Vuibert, 1928.

groupe, dont la démonstration qui eût un peu dépassé le cadre de ma précédente brochure n'utilise cependant qu'un minimum de connaissances sur la composition des transformations.

2. — Considérons d'abord deux complexes linéaires c_1 et c_2. Le produit des corrélations C_1 et C_2 attachées à ces complexes est une homographie H conservant les points des droites focales d et d' de la congruence (c_1, c_2); pour réaliser H, on peut, d'un point M, mener la droite δ s'appuyant sur d et d'; comme elle est conservée globalement, le transformé M′ de M par H est un point de δ, déterminant avec M et les points de δ situés sur d et d' une division de rapport anharmonique constant λ.

Pour que l'on ait $C_1 C_2 = C_2 C_1$, il faut et il suffit que la transformée de C_1 par C_2 (par exemple) soit C_1 ou encore que chacun des complexes soit invariant par la corrélation de l'autre, c'est-à-dire que c_1 et c_2 soient en involution. D'autre part, on voit immédiatement que le produit des homographies $C_1 C_2$ et $C_2 C_1$ est la transformation identique, la seconde est donc l'inverse de la première: la condition de permutabilité demandée peut donc se traduire aussi par $\lambda = -1$.

De là résulte qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'involution de c_1 et c_2 consiste en ceci: l'homographie résultant des corrélations de ces deux complexes pourra s'engendrer en menant d'un point M la droite δ s'appuyant sur les droites focales d et d' de la congruence (c_1, c_2) et prenant le conjugué harmonique M′ de M par rapport aux points d'intersection de δ avec d et d'.

3. — Considérons d'une part h complexes linéaires et d'autre part, k complexes linéaires, tels que chacun des h premiers soit en involution avec chacun des k autres. Tout complexe de la famille linéaire (à $h - 1$ paramètres) contenant les h premiers complexes et tout complexe de la famille linéaire (à $k - 1$ paramètres) contenant les k autres sont en involution, et par suite un complexe spécial de la première famille et un complexe spécial de la seconde ont leurs axes concourants.

Notamment, si à deux complexes linéaires c_1 et c_2, en involution ou non, on adjoint deux complexes linéaires c_3 et c_4, en

involution ou non, mais tels que tout complexe du faisceau (c_1, c_2) soit en involution par rapport à tout complexe du faisceau (c_3, c_4), les droites focales de la congruence (c_1, c_2) et celles de la congruence (c_3, c_4) formeront un quadrilatère gauche. Pareillement s'il y a involution entre deux complexes quelconques pris dans deux des trois faisceaux (c_1, c_2), (c_3, c_4), (c_5, c_6) les droites focales des congruences linéaires correspondantes formeront les couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre T.

4. — Soient C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 les six corrélations attachées aux complexes linéaires c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, deux à deux en involution, et laissant invariant le complexe quadratique $f = 0$. Puisque chacune de ces corrélations est invariante par toutes les autres, leur composition est commutative. Chacune d'elles est d'ailleurs sa propre inverse et coïncide avec ses puissances impaires, toutes ses puissances paires se réduisant à la transformation identique. On voit de plus qu'il en est de même du produit de nos six corrélations, car les homographies $C_1 C_2$, $C_3 C_4$, $C_5 C_6$ peuvent se transformer, par une homographie convenable (qui rejeterait à l'infini trois des sommets du tétraèdre T dans trois directions rectangulaires), dans les trois symétries par rapport aux arêtes d'un trièdre trirectangle. On peut donc écrire symboliquement

$$C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 = 1 . \qquad (1)$$

5. — Nous avons maintenant tous les éléments requis pour l'étude du groupe de transformations, projectives et dualistiques, dérivant des six opérations C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 et conservant le complexe quadratique $f = 0$.

Les transformations projectives procèdent de la composition d'un nombre pair de facteurs C_i. En vertu de la relation (1), il suffit de considérer deux facteurs C_i. On obtient ainsi, en y comprenant la transformation identique, un groupe de seize transformations homographiques *distinctes:* ce dernier point se vérifiera en considérant par exemple le cas où les équations des c_1 sont respectivement

$$l \pm a = 0 \qquad m \pm b = 0 \qquad n \pm c = 0 .$$

Si nous voulons maintenant épuiser les transformations dualistiques, il nous suffit d'ajouter aux six opérations fondamentales leurs produits trois à trois: en vertu de (1) chacun de ces produits et son complémentaire représentent la même transformation, il y a donc autant d'opérations de ce genre que de paires dans le nombre des combinaisons de six objets trois à trois, ce qui fait dix corrélations composées (s'ajoutant aux six corrélations simples C_i) ; ces dix corrélations sont réciproques, car au plan qu'elles font correspondre à un point, elles font à nouveau correspondre ce même point, ce qu'on verra aisément pour C_1, C_2, C_3 (par exemple) mise sous la forme $(C_1, C_2)\, C_3$. Comme le point précédent n'est pas dans le plan corrélatif, ces dix transformations dualistiques sont des polaires réciproques par rapport à dix quadriques fondamentales.

Finalement nous avons donc un groupe comprenant en tout 32 transformations, à savoir 16 homographies et 16 corrélations: parmi celles-ci, il y a les 6 corrélations initiales (relatives aux complexes c_i) et 10 transformations par polaires réciproques par rapport à dix quadriques fondamentales.

6. — Toute transformation conservant le complexe quadratique $f = 0$ conserve sa surface des singularités (ou surface de Kummer). D'un des points doubles, on passa donc, par les 32 transformations du groupe précédent, d'une part au système des 16 points doubles, d'autre part à celui des 16 plans tangents doubles. On a ainsi, par la théorie des groupes, l'explication d'un fait qu'on peut rattacher aussi (*loc. cit.*) à la Géométrie algébrique.

Bien entendu, tout ceci suppose que l'on opère sur un complexe quadratique général. Sinon, ou bien le système des six complexes fondamentaux c_i peut être dégénérescent (par confluence), ou bien de nouvelles opérations peuvent venir s'incorporer au groupe, comme il arrive pour les complexes à trois plans de symétrie rectangulaires donnant naissance à des surfaces singulières du type de la surface des ondes. Mais pour ce point, il me suffit de renvoyer le lecteur aux premières pages de la Thèse de M. Jules Richard, *Sur la surface des Ondes de Fresnel* (Paris, 1901).