SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

Autor(en): **Teodoriu, Luca**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22603

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Il est possible d'ailleurs que beaucoup de ces relations soient connues depuis longtemps, mais, à notre connaissance celle-ci est la manière la plus simple et à la fois la plus générale de les obtenir toutes de proche en proche et nous croyons qu'elle constitue un excellent exercice pour les débutants de l'Analyse. C'est à eux que nous avons pensé en écrivant ces lignes.

Bucarest, 13 septembre 1929.

SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

PAR

Luca TEODORIU (Bucarest).

---

1. — Lorsqu'un milieu continu se déplace et se déforme d'une manière continue, on sait que ses éléments obéissent à certaines lois géométriques qui résultent de la continuité et de l'existence des dérivées [1]. Mais l'hypothèse d'existence des dérivées est quelquefois superflue dans beaucoup de problèmes relatifs à la question citée. Le but de cette note est de donner seulement quelques exemples simples à l'appui de cette affirmation.

2. — Soient

$$X_i = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

les formules de transformation qui donnent à l'instant t les coordonnées d'un point X, l'homologue dans le milieu transformé d'un point x, du milieu primitif.

Les fonctions X_i sont uniformes et continues dans l'intérieur du milieu primitif et inversement x_i sont des fonctions uniformes et continues des X_i dans le milieu transformé.

---

[1] Voir le mémoire de M. COSSERAT dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*, tome X.

Supposons qu'il s'agit de trouver les fonctions f_i qui permettent d'amener le milieu de l'état primitif à l'état transformé par un déplacement d'ensemble, ce qui revient d'avoir une déformation nulle.

Ce problème se réduit à l'intégration de l'équation fonctionnelle (qui exprime la rigidité):

$$(X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 + (X_3 - Y_3)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \qquad (2)$$

où

$$X_1, X_2, X_3 \quad \text{et} \quad Y_1 Y_2 Y_3$$

sont les homologues des deux points arbitraires

$$x_1, x_2, x_3 \quad \text{et} \quad y_1, y_2, y_3 .$$

La solution est connue.

Les X_i sont des fonctions linéaires et orthogonales des x_i; mais pour intégrer l'équation (2) on introduit dans toutes les démonstrations que je connais, une nouvelle restriction:

Les fonctions f_i admettent des dérivées partielles de premier et de second ordre [1].

Je dis que cette restriction est inutile.

Traitons la question directement dans l'espace à n dimensions.

L'équation (2) devient:

$$\Sigma(X_e - Y_e)^2 = \Sigma(x_i - y_i)^2 \qquad i, e = 1, 2 \ldots n \qquad (3)$$

Je maintiens seulement l'hypothèse de la continuité et de la biunivocité. Au point:

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0 \qquad (4)$$

correspondra après la transformation

$$X_i = f_i(x_1, x_2 \ldots, x_n) \qquad i = 1, 2 \ldots n \qquad (5)$$

le point:

$$Y_1 = a_1 \quad Y_2 = a_2 \ldots Y_n = a_n \qquad (6)$$

---

[1] E. Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, 1914, chapitre 1.

et l'équation (3) devient:

$$(X_1 - a_1)^2 + \dots + (X_n - a_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \,. \qquad (7)$$

Soit le point:

$$y_1 = \alpha_1 \qquad y_2 = \alpha_2 \dots y_n = \alpha_n \qquad (8)$$

qui devient après la transformation (5):

$$Y_1 = Y_2 = \dots Y_n = 0 \,. \qquad (9)$$

La relation (3) devient:

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = (x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + \dots + (x_n - \alpha_n)^2 \,. \qquad (10)$$

Par soustraction on obtient de (7) et (10)

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 2(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) \,. \qquad (11)$$

Mais on déduit de (3)

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = r^2 \qquad (12)$$

égalité qui exprime que la distance r du point

$$a_1 \quad a_2 \,, \dots, \, a_n$$

à l'origine se conserve après la transformation (5).

Simplifiant avec (2) et ayant en vue (12)

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = r^2 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_n x_n \,. \qquad (13)$$

Maintenant il suffit de supposer que je choisisse dans le milieu transformé pour axe OX_i la droite qui joint les points

$$(O \,, O \,, \dots O) \qquad \text{et} \qquad (a_1 \,, a_2 \,, \dots a_n)$$

ce qui revient à considérer

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 0 \dots a_n = 0 \qquad a_i \neq 0$$

et (13) devient:

$$\overline{X}_i = \overline{K}_i + \overline{A}_{i.1} x_1 + \overline{A}_{i.2} x_2 + \dots + \overline{A}_{in} x_n \tag{14}$$

où j'ai mis:

$$\overline{K}_i = \frac{r^2}{a_i} ; \quad \overline{A}_{i,1} = -\frac{\alpha_1}{a_i} ; \quad \overline{A}_{i,2} = -\frac{\alpha_2}{a_i} ; \dots ; \quad \overline{A}_{in} = -\frac{\alpha_n}{a_i} .$$

Comme les X_i sont des fonctions linéaires des $\overline{X}_i$ (ayant en vue les formules de changement d'axes) on obtient de (14) pour les X_i:

$$X_i = K_i + A_{i.1} x_1 + A_{i.2} x_2 + \dots + A_{in} x_n \qquad i = 1.2, \dots n . \tag{15}$$

Enfin, en remplaçant les valeurs des X_i dans l'égalité (7) et en identifiant on obtient:

$$\sum A_{ik}^2 = 1 \qquad \sum A_{ik} A_{ij} = 0 .$$

3. — Un autre exemple où l'on peut appliquer une méthode analogue. Trouvons dans le plan les transformations

$$X_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad X_2 = f_2(x_1, x_2) \tag{1}$$

qui conservent l'aire de tous les triangles, soit infinitésimaux ou *même finis*.

L'équation fonctionnelle qu'il faut intégrer est:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & 1 \\ Z_1 & Z_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

où

$$X_1, X_2 ; \qquad Y_1, Y_2 ; \qquad Z_1, Z_2$$

sont les homologues des points

$$x_1, x_2 ; \qquad y_1, y_2 ; \qquad z_1, z_2 .$$

En vertu de la continuité et de la biunivocité, au point

$$z_1 = z_2 = 0$$

lui correspondra un point unique

$$Z_1 = a \qquad Z_2 = b \ .$$

Soit maintenant le point

$$z_1 = \alpha \ ; \qquad z_2 = \beta$$

qui après la transformation (1) devient

$$Z_1 = Z_2 = 0 \ .$$

L'équation (2) prend successivement les formes suivantes:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{3}$$

et

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} \ . \tag{4}$$

Développant les déterminants (3) et (4) on obtiendra:

$$\begin{aligned} (X_1 - a)(Y_1 - b) - (X_2 - b)(Y_1 - a) &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 &= (x_1 - \alpha)(y_2 - \beta) - (x_2 - \beta)(y_1 - \alpha) \end{aligned} \tag{5}$$

et par soustraction

$$-b(X_1 - Y_1) + a(X_2 - Y_2) = \beta(x_1 - y_1) - \alpha(x_2 - y_2) \ . \tag{6}$$

Si les points du milieu primitif

$$0 \ , \ 0 \ ; \qquad \alpha \ , \ \beta \ , \qquad y_1 \ , \ y_2$$

sont colinéaires, alors leurs transformés le sont aussi. Donc l'égalité

$$\alpha y_2 - \beta y_1 = 0$$

entraîne

$$a Y_2 - b Y_1 = 0$$

et la relation (6) devient

$$-bX_1 + aX_2 = \beta x_1 - \alpha x_2 \ . \tag{7}$$

Considérant dans le milieu transformé la droite qui joint les points

$$(0 \quad 0) \qquad (a\,,\ b)$$

comme axe OX_2; (7) devient

$$\overline{X}_1 = \overline{A}_1 x_1 + \overline{B}_1 x_2 \tag{8}$$

où

$$\overline{A}_1 = -\frac{\beta}{b} \qquad \overline{B}_1 = +\frac{\alpha}{b}\,,$$

et de même

$$\overline{X}_2 = \overline{A}_2 x_1 + \overline{B}_2 x_2\,. \tag{9}$$

Comme le passage du système X_1, X_2 au système $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ se fait par des formules linéaires, les expressions des X_1 et X_2 seront de la forme suivante:

$$X_1 = k_1 + A_1 x_1 + B_1 x_2\,; \qquad X_2 = k_2 + A_2 x_1 + B_2 x_2\,. \tag{10}$$

En remplaçant dans l'équation (2) les points

$$X_1 X_2\,, \qquad Y_1 Y_2\,, \qquad Z_1 Z_2$$

par les valeurs (10), on obtient facilement

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 1\,.$$

4. — Si au lieu de la conservation de l'aire on avait imposé à la transformation (1) la conservation des angles (similitude), on serait arrivé par une méthode analogue aux mêmes formules de transformation (10) mais dans lesquelles

$$A_1 = B_2 \qquad A_2 + B_1 = 0\,.$$

Bucarest, décembre 1928.