SUR UN THÉORÈME DE WILSON

Autor(en): **Toscano, Letterio**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22604

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR UN THÉORÈME DE WILSON

PAR

Letterio TOSCANO (à Messine).

---

1. — Sur le développement de $n! = 1.2\ldots n$ on connaît la relation fondamentale de LEGENDRE

$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-2}\binom{n}{2}2^n + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}, \qquad (1)$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$, amplement étudiée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* [1], dans le *Giornale di Matematiche di Battaglini* [2], dans *La Matematica Elementare* [3], dans le *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana* [4]. Une démonstration de la (1) peut être lue dans les *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, par E. PASCAL (Part. III, Calcolo delle variazioni e delle differenze finite, p. 231; 2me édition, Hœpli, Milano, 1918), fondée sur les différences finies de O^n. Mais on peut faire déduire (1) de relations plus générales.

Ainsi, si

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

est un polynome entier par rapport à x, on a

$$f(x) - \binom{n}{1}f(x+h) + \binom{n}{2}f(x+2h) - \ldots$$
$$+ (-1)^n f(x+nh) = (-1)^n a_0 n!\, h^n . \qquad (2)$$

---

[1] Années 1895, p. 165; 1896, pp. 26 et 299; 1897, p. 59; 1899, pp. 51 et 284; 1900, pp. 22 et 280; 1901, p. 164.
[2] T. 31, 1894; T. 40, 1902.
[3] Année 3, 1924, p. 123.
[4] Année 6, 1927, p. 187.

Et avec $h = -1$, $f(x) = x^n$, $x = n$ on retrouve la (1).

De plus, si

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

sont n nombres arbitrairement choisis et si nous posons

$$\begin{aligned}
\varrho_1^p &= \alpha_1^p + \alpha_2^p + \ldots + \alpha_n^p \\
\varrho_2^p &= (\alpha_1 + \alpha_2)^p + (\alpha_1 + \alpha_3)^p + \ldots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)^p \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varrho_n^p &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^p ,
\end{aligned}$$

on a les formules

$$\left\{\begin{aligned}
&\varrho_n^p - \varrho_{n-1}^p + \varrho_{n-2}^p - \ldots + (-1)^{n-1}\varrho_1^p = 0 \qquad p < n \\
&\varrho_n^n - \varrho_{n-1}^n + \varrho_{n-2}^n - \ldots + (-1)^{n-1}\varrho_1^n = n!\,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

et avec

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = a ,$$

on trouve par conséquent

$$\begin{aligned}
&n^p - \binom{n}{1}(n-1)^p + \binom{n}{2}(n-2)^p - \ldots = 0 \qquad p < n \\
&n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \ldots = n! .
\end{aligned}$$

Les expressions (3) ont été établies par N. Agronomof (de Vladivostok) dans la Note sur quelques formules concernant la formule

$$\sum \binom{n}{k}(n-k)^n = n! \text{ [1]}$$

2. — Nous démontrons ici (2) et après un théorème de *Wilson* par un théorème de *Fermat* et par la relation (1) de *Legendre*.

Considérons la différence première $f(x+h) - f(x)$ de la fonction $f(x)$, et représentons la par $\Delta^{(1)}f(x)$.

---

[1] *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*, Année 6, 1927, p. 187. Cette note fut publiée en réponse à la demande proposée du *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana* (Année 6, 1927, p. 36) de trouver des relations générales d'où on peut déduire (1).

On a

$$\Delta^{(1)}f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^{(2)}f(x) = f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$$

$$(-1)\,\Delta^{(3)}f(x) = f(x) - 3f(x+h) + 3f(x+2h) - f(x+3h)$$

$$\Delta^{(4)}f(x) = f(x) - 4f(x+h) + 6f(x+2h) - 4f(x+3h) + f(x+4h)$$

et par la méthode d'induction

$$(-1)^n\Delta^{(n)}f(x) = f(x) - \binom{n}{1}f(x+h) + \binom{n}{2}f(x+2h) - \dots + (-1)^n f(x+nh)\,.$$

Si

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

on a

$$\Delta^{(n)}f(x) = a_0\,n!\,h^n$$

et de là la (2)

Autrement par le théorème de LAGRANGE sur les dérivées on a

$$\Delta^{(1)}f(x) = hf'(x+\theta'h)$$

avec $0 < \theta' < 1$;

$$\Delta^{(2)}f(x) = h\left\{f'(x+h+\theta'h) - f'(x+\theta'h)\right\}$$
$$= h^2f''(x+\theta''h)\ ;$$

et enfin

$$\Delta^{(n)}f(x) = h^nf^{(n)}(x+\theta^{(n)}h)\,.$$

Mais

$$f^{(n)}(x+\theta^{(n)}h) = a_0\,n!$$

et de là suit la formule (2).

3. — Nous supposons $n > 2$ nombre premier et si a n'est pas multiple de n, le nombre $a^{n-1} - 1$ est divisible par n (FERMAT).

Ainsi

$$2^{n-1} = 1 + n\mathrm{B}' \qquad (n-2)^{n-1} = 1 + n\mathrm{B}$$

$$3^{n-1} = 1 + n\mathrm{C}' \qquad (n-3)^{n-1} = 1 + n\mathrm{C}$$

. . . . . .

étant B, B′, . . ., C, C′,. . . nombres entiers.

En outre $(n-1)^n = (-1)^n + nA$ avec A entier.

Alors la relation de LEGENDRE, divisée par n, nous donne

$$(n-1)! = n^{n-1} + (-1)^{n+1} - nA + \binom{n-1}{2}(1+nB) - \binom{n-1}{3}(1+nC) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2}(1+nC') + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1}(1+nB') + (-1)^{n-1}$$

et de là

$$(n-1)! = \left\{ n^{n-1} - nA + \binom{n-1}{2}nB - \binom{n-1}{3}nC + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2}nC' + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1}nB' \right\} + \left\{ (-1)^{n-1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} \right\}.$$

Mais

$$(-1)^{n-1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} =$$

$$= \left\{ \binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} \right\} +$$

$$+ n - 1 - 1 + (-1)^{n-1} = n - 2 + (-1)^{n-1},$$

puisque

$$\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \dots + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} = (1-1)^n = 0 ;$$

et aussi

$$(n-1)! + 2 - (-1)^{n-1} = nP$$

avec P entier.

Pour $n > 2$ premier on a enfin la relation

$$(n-1)! + 1 = nP .$$

Réciproquement si

$$(n-1)!+1=nP\ ,$$

le nombre n est premier et l'on a aussi démontré le *théorème de Wilson*.

Ce théorème fut attribué à WILSON par WARING, mais on le doit à LAGRANGE.

Messine, 24 décembre 1928.

MOUVEMENT D'UN POINT DONT L'ACCÉLÉRATION EST PARALLÈLE A UNE DROITE OU A UN PLAN CONSTANTS

PAR

Letterio TOSCANO (à Messine).

Dans mon travail *Moto di un punto sollecitato da una forza la cui linea d'azione incontra una retta fissa*, sous presse dans le *Giornale di Matematiche*, nous traitons de manière complète et en appliquant la méthode vectorielle, un problème traité déjà par CERRUTI, DAINELLI, CESARO, GEBBIA, avec méthodes diverses qui conduisent à des calculs compliqués.

M. U. DAINELLI, dans un autre travail, *Sul movimento per una linea qualunque* (*Giornale di Matematiche*, vol. 18, 1880, pp. 271, 300), considère le mouvement d'un point dont l'accélération est parallèle à une droite ou à un plan constants; et ici nous reprenons le même problème pour le traiter par la méthode vectorielle.

1. — Mouvement d'un point dont l'accélération a une direction constante.

Soit P le point mobile et a un vecteur unitaire suivant la direction constante