SUR UN THÉORÉME DE SCHRÖTER

Autor(en): **Deaux, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22606

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR UN THÉORÈME DE SCHRÖTER

PAR

R. DEAUX (Mons).

---

1. — Le théorème énoncé par M. G. FRANKE (*Enseignement mathématique*, tome XXVII, p. 137) comme généralisation d'un théorème étudié par M. A. STREIT dans quelques cas spéciaux (*Enseign. math.*, tome XXVI, pp. 97-138) n'est pas nouveau. Il constitue la question 5423 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1924, p. 101) et signée *Fabricando*. Quant à l'existence des six droites concourantes, qui fait l'objet de la seconde partie du travail, nous ne l'avons pas rencontrée dans les articles que nous rappelons ci-dessous. Nous nous proposons de démontrer géométriquement ces propriétés ainsi que quelques autres et de montrer leur liaison avec celles que, depuis SCHRÖTER, on connaît sur cette question.

2. — Si P est un point quelconque du plan d'un triangle ABC, les points $P_1 = (BC, AP)$, $P_2 = (CA, BP)$, $P_3 = (AB, CP)$ sont les sommets d'un triangle appelé par NEUBERG *triangle pédal de* P. Soit $Q_1 Q_2 Q_3$ le triangle pédal d'un second point quelconque Q. Etudions la figure en exploitant l'idée que par les cinq points A, B, C, P, Q il passe une seule conique Σ.

Les triangles $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$, étant les triangles diagonaux des quadrangles ABCP, ABCQ inscrits à Σ, sont conjugués à Σ. Les points $A' = (P_2 P_3, Q_2 Q_3)$, $B' = (P_3 P_1, Q_3 Q_1)$, $C' = (P_1 P_2, Q_1 Q_2)$ sont donc les pôles des droites BC, CA, AB, et la droite $B'C'$, par exemple, est la tangente en A à Σ. Par suite, *le triangle* $A'B'C'$ *est circonscrit au triangle* ABC *et à la conique* Σ. *Ces deux triangles se correspondent dans une homologie dont le centre* R *et l'axe* r *sont pôle et polaire par rapport à* Σ *et à chacun de ces triangles.*

La droite $P_1 A'$ est la polaire par rapport à Σ du point $(P_2 P_3,$

BC). Dès lors, *les triangles* $P_1P_2P_3$, $A'B'C'$ *se correspondent dans une homologie dont le centre* P' *est le pôle, par rapport à* Σ, *de la polaire trilinéaire* p *de* P *dans le triangle* ABC, *et dont l'axe* p′ *est la tangente en* P *à* Σ. *Les triangles* $Q_1Q_2Q_3$, $A'B'C'$ *se correspondent dans une homologie dont le centre* Q' *est le pôle de la polaire trilinéaire* q *de* Q, *et dont l'axe* q′ *est la tangente en* Q *à* Σ.

Si une droite pivote autour du point R, son pôle trilinéaire décrit une conique qui passe par A, B, C et qui a pour tangente en A par exemple, la droite qui contient le point (r, BC), c'est-à-dire $B'C'$; cette conique est donc Σ. Par suite, *le point* R *est l'intersection des droites* p, q; *la droite* r *joint les points* P', Q'.

Les polaires trilinéaires des points de p, q enveloppent les coniques (ϖ), (θ) inscrites à ABC et circonscrites respectivement aux triangles $P_1P_2P_3$, $Q_1Q_2Q_3$. Donc r *est la quatrième tangente commune aux coniques* (ϖ), (θ).

La conique (ϖ) est aussi le lieu des pôles de p par rapport aux coniques circonscrites au quadrangle ABCP. Comme r est la polaire de R par rapport à Σ, *les points* P', Q' *sont les points de contact de* r *avec les coniques* (ϖ), (θ).

Les quadrangles $P_1P_2P_3P'$, $Q_1Q_2Q_3Q'$ ayant le même triangle diagonal $A'B'C'$, *les huit points* P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, P', Q' *sont situés sur une même conique* η. *Les côtés des triangles* $P_1P_2P_3$, $Q_1Q_2Q_3$ *et les droites* p, q *sont huit tangentes à une même conique, polaire réciproque de* η *par rapport à* Σ.

Cette étude a été proposée par SCHRÖTER dans sa géométrie synthétique et par les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1891, question 1562); elle a été reprise par DROZ FARNY dans les Comptes rendus de l'*Association française pour l'Avancement des Sciences* (1897), et par *Mathesis:* 1891, p. 152 (LACHLAN); 1892-51 (DÉPREZ, LISTRAY); 1908-148 (NEUBERG); 1922-94, 334 (AD. MINEUR); 1923-215 (SOLLERTINSKY, NEUBERG, MINEUR); 1924-71 (THÉBAULT, DEAUX); 1925-338 (SOLLERTINSKY, MINEUR).

3. — Soient P'_1 et Q'_1 les points (P_2P_3, AQ), (Q_2Q_3, AP), et P'_2, P'_3, Q'_2, Q'_3 leurs analogues; $T = p'q'$ le pôle de la droite PQ par rapport à Σ. Comme les points P, A de Σ sont alignés sur le pôle P_1 de la droite P_2P_3, celle-ci est rencontrée par les droites QP, QA en deux points (QP, P_2P_3), P'_1 conjugués par rapport à

Σ, et la droite $P_1 P'_1$ passe par T. D'où le théorème énoncé par M. FRANKE: *les six droites* $P_i P'_i$, $Q_i Q'_i$ ($i = 1, 2, 3$) *sont concourantes*. On voit de plus que *le point de concours* T *est l'intersection des axes d'homologie* p', q' *des triangles* $P_1 P_2 P_3$, $A' B' C'$ *et* $Q_1 Q_2 Q_3$, $A' B' C'$, ou encore *le pôle de la droite* PQ *par rapport à la conique* Σ.

La droite qui joint un point au milieu de sa corde polaire contient le centre de la conique. Donc, *si* A_1, B_1, C_1, O *sont les milieux des segments* BC, CA, AB, PQ *les quatre droites* $A' A_1$, $B' B_1$, $C' C_1$, TO *sont concourantes* (voir *Mathesis*, 1927-462, R. GOORMAGHTIGH, Ad. MINEUR).

Les droites TP_1, T(PQ, $P_2 P_3$) sont conjuguées par rapport à Σ. Dès lors, *si du point* T *on projette les sommets des triangles* $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$ *et les points où les côtés opposés sont rencontrés par la droite* PQ, *on a six couples d'une involution dont les rayons doubles sont* TP, TQ.

4. — Voici une seconde démonstration géométrique du premier théorème de M. FRANKE et de sa réciproque, mais qui n'établit pas du même coup le concours des six droites, parce qu'elle se base sur la considération soit de la conique (ϖ) soit de la conique (θ).

Si P''_1 est le conjugué harmonique de P'_1 par rapport aux points P_2, P_3, la droite AP''_1 est la polaire de P'_1 par rapport à (ϖ) et passe par le point (BC, q). Ce point est donc le pôle de la droite $P_1 P'_1$ et les droites $P_1 P'_1$, $P_2 P'_2$, $P_3 P'_3$ concourent au pôle de q.

Réciproquement, si ces droites concourent en un point T, les points P''_1, P''_2, P''_3 se trouvent sur la polaire trilinéaire t de T dans le triangle $P_1 P_2 P_3$ et les polaires AP'_1, BP'_2, CP'_3 des points P''_1, P''_2, P''_3 par rapport à (ϖ) concourent au pôle Q de t.

Les deux démonstrations prouvent que *le point* T *est en même temps le pôle de* q *par rapport à* (ϖ) *et le pôle de* p *par rapport à* (θ).

Les polaires de R par rapport à (ϖ), (θ) étant TP $= p'$, TQ $= q'$ les points T, R sont conjugués par rapport au faisceau ponctuel défini par (ϖ), (θ). Le triangle conjugué commun est $A'B'C'$. Comme les pôles de RT par rapport à (ϖ), (θ) sont les points $p'q$, pq', *les sept points* R, T, A', B', C', pq', $p'q$ *se trouvent sur une même conique.*

Ecole des Mines de Mons, octobre 1928.