SUR LA TRISECTION APPROCHÉE D'UN ANGLE QUELCONQUE

Autor(en): **d'Ocagne**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23267

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LA TRISECTION APPROCHÉE D'UN ANGLE QUELCONQUE

PAR

M. D'OCAGNE, de l'Académie des Sciences (Paris).

J'ai naguère été conduit par une voie indirecte à une solution approchée de ce problème [1]. Je vais faire voir ici comment elle peut-être retrouvée par une méthode directe tout à fait analogue à celle que j'ai suivie pour le problème de la rectification approchée d'un arc de cercle [2].

Soit, sur le cercle de centre O et de rayon égal à 1, l'arc AB mesurant l'angle 3α qu'il s'agit de trisecter par le point M tel que l'arc AM mesure α. Abaissons de B sur OA la perpendiculaire BH égale à $\sin 3\alpha$ et prenons sur HB le point C tel que $HC = \lambda HB$. De C comme centre, avec un rayon r égal à μHB, décrivons un cercle et tâchons de déterminer λ et μ de façon que ce cercle passe aussi près que possible du point M. On a, en posant $CM = l$,

$$l^2 = (\cos\alpha - \cos 3\alpha)^2 + (\sin\alpha - \lambda \sin 3\alpha)^2 .$$

Par suite, l'écart entre l^2 et r^2 est donné par

$$\Delta = (\cos\alpha - \cos 3\alpha)^2 + (\sin\alpha - \lambda \sin 3\alpha)^2 - \mu^2 \sin^2 3\alpha .$$

Remplaçant dans cette expression $\cos 3\alpha$ et $\sin 3\alpha$ par leurs valeurs

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha(1 - 4\sin^2\alpha) , \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

---

1 *Génie civil*, t. LXII, 1912, p. 79.
2 *Nouv. Ann. de math.*, 4me série, t. VII, 1907, p. 1.

et réduisant, on trouve, en posant $\lambda^2 - \mu^2 = \nu$,

$$\Delta = (1 - 6\lambda + 9\nu)\sin^2\alpha + 8(2 + \lambda - 3\nu)\sin^4\alpha + 16(\nu - 1)\sin^6\alpha \ .$$

Si nous annulons les deux premiers termes en prenant

$$1 - 6\lambda + 9\nu = 0 \ , \qquad 2 + \lambda - 3\nu = 0 \ ,$$

d'où nous tirons $\lambda = \frac{7}{3}$, $\nu = \frac{13}{9}$, et, par suite $\mu = 2$, nous avons

$$\Delta = \frac{64}{9}\sin^6\alpha \ .$$

Mais, de

$$l^2 - r^2 = \Delta \ ,$$

nous tirons

$$l = (r^2 + \Delta)^{\frac{1}{2}} = r + \frac{\Delta}{2r} + \ldots$$

ou, en négligeant les termes en Δ^2, Δ^3, ...

$$l - r = \frac{\Delta}{2r} = \frac{16}{9}\frac{\sin^6\alpha}{\sin 3\alpha} \ .$$

Cela fixe l'ordre de petitesse de l'écart entre l et r, qui, pour α très petit, et regardé comme de premier ordre, est le cinquième (le même, par conséquent, que celui qui se rapporte à notre rectification du cercle rappelée plus haut).

Au surplus on peut remarquer que l'angle de 15° pouvant être rigoureusement construit, il suffit, dans tous les cas d'appliquer la construction approchée à un angle au plus égal à 45°. Or, pour $\alpha = 15°$, on trouve

$$\frac{16}{8}\frac{\sin^6\alpha}{\sin 3\alpha} = 0{,}00075 \ ,$$

quantité strictement négligeable.

La construction ici retrouvée est donc, en pratique, largement suffisante; on voit qu'elle peut se formuler comme suit:

Ayant marqué, sur HB, *le point* D *tel que* $\mathrm{HD} = \frac{\mathrm{HB}}{3}$ *et le point* C *tel que* DC = 2HB, *on décrit de* C *comme centre, avec* CD *pour rayon un arc de cercle qui coupe l'arc* AB *au point* M *cherché.*