Notations différentielles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

points d'intersection entre elles des courbes nulles relatives aux faces déterminant l'arête. Ces points forment la transition entre les voisinages des courbes nulles et fixent, par conséquent, le mode de *connexion* de la surface au voisinage de O.

Les substitutions introduites ailleurs [1], établissent ces différents faits et conduisent finalement à une représentation analytique complète de la surface en O. Elles donnent en particulier, chose essentielle, les *lignes singulières* issues, cas échéant de O.

Une théorie paraissant mettre en lumière les points principaux se trouve, de la sorte, esquissée dans les lignes qui précèdent. Cette théorie exige d'assez longs développements. Toutes choses égales, elle ne diffère pas sensiblement des théories relatives aux points singuliers des courbes planes [2]. Pour les surfaces, le polyèdre analytique paraît occuper la même place, avoir la même importance, que le polygone de Newton pour les courbes.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Notations différentielles.

1. — Je m'associe aux remarques judicieuses présentées par M. Winants (*L'Enseignement mathématique*, 28me année, 1929, p. 293) au sujet de la notion de différentielles. C'est en effet là un des points des mathématiques, où celui qui recherche des précisions ne trouve pas toujours, près des meilleurs auteurs même, les éclaircissements souhaités. Les prudentes recommandations quant au mode d'emploi des différentielles d'ordre supérieur, qui accompagnent généralement l'exposé, permettent sans doute de *calculer* correctement avec les différentielles; *le but de l'enseignement n'est pas cela seulement.* Il reste d'ailleurs le risque que sous les mêmes symboles tous ne voient pas la même chose, la crainte d'employer des symboles classiques en leur prêtant une signification qui ne soit pas reconnue par tous. Je ne crois pas rabaisser le débat en en faisant *une question de notations*; peut-être cette étude, où je n'innove pas quant au fond, justifiera-t-elle *les résultats* des expositions usuelles, sinon *le mode d'expression* de celles-ci.

---

[1] *Actes de la Soc. helv. des Sc. nat.*, Soleure, 1911, Altdorf, 1912, ainsi que *C. R.*, tomes 152 et 154.

[2] *Commentarii mathematici helvetici*, tome I, p. 120.

2. — Les dérivées successives d'une fonction y de la variable indépendante x se définissent sans difficulté et sont de nouvelles fonctions de x, désignées sans ambiguïté par y', y'', ... tant qu'il n'y a pas changement de variable.

Avec la notation différentielle, par l'emploi de l'opérateur $\frac{d}{dx}$, on écrit

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{1}$$

sans qu'il soit besoin de s'engager plus avant pour apercevoir la nature des difficultés.

En posant $dx = \Delta x$, on peut définir dy par

$$dy = y'\,dx \tag{2}$$

et l'on a de même $dy' = y''\,dx$, ...

Peut-on aussi écrire *par définition*

$$d^2y = y''\,dx^2 \tag{3}$$

ou cela n'implique-t-il pas confusion ou contradiction ? Voilà la question posée.

Or l'accroissement dx de la *variable indépendante* x étant complètement arbitraire, constitue ici *une nouvelle variable indépendante* (plutôt qu'une constante arbitraire). Ecrivons (2) sous la forme

$$dy = F_1(x\,,\,dx) \tag{4}$$

et rappelons-nous que pour différentier dy, fonction de deux variables, il faut distinguer désormais la différentiation totale et les différentielles partielles. On sait (ou on doit l'établir alors) que pour une fonction $\varphi(\alpha, \beta)$ des variables indépendantes α, β, on a

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}d\beta = d_\alpha\varphi + d_\beta\varphi\ , \tag{5}$$

$d\varphi$ étant la différentielle totale, $d_\alpha\varphi$, $d_\beta\beta$ les différentielles partielles où l'on regarde successivement β ou α *comme constante.*

En différentiant *totalement* dy, sous la forme (2) ou la forme (4), on obtient

$$d(dy) = y''\,dx^2 + y'\,d(dx) = d_x(dy) + d_{dx}(dy)\ ; \tag{6}$$

dy étant linéaire en dx

$$d_{dx}(dy) = y'\,d(dx) \tag{7}$$

et

$$d_x(dy) = y''\,dx^2\ . \tag{8}$$

Comparer (3) et (8) montre que par d^2y il faudrait entendre *ici* une différentielle *partielle* en x de dy, obtenue, suivant l'usage, *en considérant* dx *comme une constante.*

y étant fonction de x seul, on a d'ailleurs

$$dy = d_x y \qquad d_x(dy) = d_x(d_x y) \tag{9}$$

et pour x, de même

$$dx = d_x x \qquad d_x(dx) = d_x(d_x x) = 0 \tag{10}$$

ce qu'on écrit d'habitude $d^2 x = 0$, tandis que la différentielle totale $d(dx)$ est une nouvelle variable indépendante.

(6) est la relation de M. Deruyts, rapportée par M. Winants, formule (F), et qui peut aussi s'écrire

$$d(dy) = d_x(dy) + y' d(dx) \ . \tag{11}$$

3. — Passons aux formules de changement de variable; on complétera les notations précédentes en écrivant y'_x, y''_{x^2} au lieu de y', y''. Avec $x = g(t)$, $y = f(x) = f[g(t)] = h(t)$, on aura

$$dx = x'_t dt \qquad dy = y'_x x'_t dt = y'_t dt = d_t y \tag{12}$$

t étant la nouvelle variable indépendante; le *principe de permanence* pour les différentielles premières traduit

$$dy = d_x y = d_t y \tag{13}$$

pour un même dx; comme il estnaturel puisque y est toujours fonction d'une seule variable, x ou t; de même pour x. Les formules de changement de variable (12) sont du type

$$dx = \mathrm{G}_1(t\,,\ dt) \qquad dy = \mathrm{H}_1(t\,,\ dt)\ ;$$

on peut employer désormais les systèmes de variables x, dx ou t, dt pour les différentielles partielles composant une différentiation totale. Partons de (11), écrite

$$d(dy) = d_x(dy) + y'_x d(dx) \ . \tag{11'}$$

De même

$$d(dx) = d_t(dx) + x'_t d(dt) \tag{14}$$

donc

$$d(dy) = d_x(dy) + y'_x d_t(dx) + y'_x x'_t d(dt)$$

$$d(dy) = d_x(dy) + y'_x d_t(dx) + y'_t d(dt) \tag{15}$$

mais on a aussi

$$d(dy) = d_t(dy) + y'_t d(dt) \quad . \tag{16}$$

La comparaison de (15) et (16) donne

$$d_t(dy) = d_x(dy) + y'_x d_t(dx) \tag{17}$$

$$d_t(dy) = y''_{x^2} dx^2 + y'_x d_t(dx) \tag{18}$$

qu'on écrit d'habitude, *avec quelque ambiguïté*

$$d^2 y = y''_{x^2} dx^2 + y'_x d^2 x \quad . \tag{19}$$

4. — Concluons en général pour les différentielles d'ordre quelconque: dans la notation usuelle, $D^n y$ *désigne toujours une différentielle partielle par rapport à la variable indépendante dont dépend* y, les différentielles totales successives de cette variable étant considérées comme constantes (maintenues constantes) pendant le calcul de $d^n y$ [1]. Il est du reste inutile d'introduire ces différentielles totales, sauf la première. Pour avoir des notations correctes, il faudrait employer des indices de différentiation partielle, des ∂ de dérivation partielle; (8) et (18) sont, pour la précision, préférables à (3) et (19); un principe de permanence, c'est-à-dire un procédé de calcul invariant, indépendant des variables employées, ne peut subsister que pour les différentielles totales, évidemment pas pour les différentielles partielles comme $d_x(dy)$ ou $d_t(dy)$, réunies d'habitude sous la forme d^2y. Mais, et ceci est une autre histoire, les notations des dérivées et différentielles partielles risquent aussi d'être incomplètes, donc souvent incorrectes; nous avons gardé ici les notations y'_x, y'_t, parce que y n'était jamais fonction que d'une seule variable: il eût mieux valu écrire $f'(x)$, $h'(t)$; de même pour les dérivées suivantes. Pour une fonction z de deux variables, $z = \varphi(\alpha, \beta) = \theta(u, v)$ par changement de variables, une notation telle que $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ prête à confusion, et est à remplacer par $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, puisque pour $\alpha = u$, $\beta \neq v$, on aura en général $\frac{\partial z}{\partial \alpha} \neq \frac{\partial z}{\partial u}$.

Il est difficile d'éviter complètement les notations abrégées, mais toute abréviation à l'écriture crée un risque à la lecture; qu'au moins l'abréviation acceptée dans une notation incomplète soit clairement indiquée !

Je veux encore rappeler qu'en analyse vectorielle [2], en calcul

---

[1] On aurait un énoncé du même genre pour une fonction de plusieurs variables.

[2] Cf. R. LEVEUGLE, *Précis de Calcul géométrique*, p. 145, où l'Auteur reprend la méthode de Hamilton.

C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi Vettoriale Generale*, I, p. 37.

différentiel absolu et autres disciplines de ce genre, on a eu besoin de généraliser la notion de différentielles et souvent de définir celles-ci avant les dérivées; les efforts faits dans ce sens peuvent servir à modifier de façon favorable l'exposé du calcul différentiel usuel; je m'excuse d'ailleurs de quelques détours destinés à présenter sous un autre jour des calculs qui pouvaient être faits plus simplement.

Après M. Winants, j'ai apporté au débat une opinion appuyée sur quelques arguments; il serait souhaitable que l'*Enseignement mathématique* en recueillit d'autres.

Le Hâvre, le 12 octobre 1930.

Paul DELENS.

CHRONIQUE

Paul Appell.

Nous n'apprendrons certainement à personne le deuil cruel qui vient de frapper la Science. Paul Appell s'est éteint le 24 octobre 1930, après une maladie à évolution lente et inexorable en laquelle il perdait peu à peu l'usage de la parole. Il était né, à Strasbourg, le 27 septembre 1855. Son âge, on le voit, n'avait rien d'excessivement avancé et, jusqu'à la fin, il tint à honneur de ne pas cesser de se montrer géomètre. C'est même *L'Enseignement mathématique* qui vraisemblablement publia son dernier travail *Sur la constante d'Euler*, en un court article placé en tête du présent volume.

Il est malaisé d'analyser rapidement l'homme et l'œuvre. Les articles nécrologiques publiés jusqu'ici, notamment dans les *Comptes rendus* des 27 octobre et 15 décembre 1930, dans *La Dépêche*, de Toulouse, du 27 octobre, et dans toute la presse quotidienne sont absolument insuffisants. Il n'en pouvait être autrement. Nous nous proposons de publier ici un grand exposé qui ne pourra être mieux placé qu'au début de notre prochain volume, tout comme nous avons fait pour Henri Poincaré, en tête du volume de 1913. Ce rapprochement ne va pas sans une immense tristesse. Trois hommes, Henri Poincaré, Paul Appell et M. Emile Picard ont dirigé l'évolution et l'enseignement mathématiques à la fin du siècle dernier et au commencement de celui-ci. La disparition du second n'est pas moins douloureuse que celle du premier. Ce qu'il faut surtout dire,