SUR CERTAINES SÉRIES DE FONCTIONS RATIONNELLES

Autor(en): **Badesco, Radu**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23894

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR CERTAINES SÉRIES DE FONCTIONS RATIONNELLES

PAR

Radu BADESCO (Cluj, Roumanie).

L'étude des séries de polynomes ou de fonctions rationnelles présente une très grande importance en ce qui concerne ses applications, car on rencontre ces séries dans beaucoup de problèmes d'Analyse ou de Physique mathématique. C'est une étude qui a un caractère d'une grande généralité, les fonctions rationnelles données pouvant appartenir à des classes dont les propriétés sont extrêmement différentes. Ainsi, nous pouvons mentionner les séries de fonctions itératives envisagées par M. JULIA, ou de fonctions rationnelles qui satisfont à certaines relations récurrentes, etc. Ces dernières ont été étudiées dans un cas particulier par H. POINCARÉ [1], ses recherches présentant un très grand intérêt du point de vue local auquel il se place.

Dans ce mémoire, nous considérerons une classe simple de séries de fonctions rationnelles généralisant celles de POINCARÉ [2], et nous déterminerons le caractère méromorphe dans certains domaines des fonctions qu'elles représentent. La méthode employée est une extension convenablement modifiée, de celle utilisée par nous dans l'étude de certaines séries particulières [3], méthode qui présente un caractère très général car elle peut être appliquée aussi dans d'autres cas, sur lesquels nous reviendrons dans un autre article.

Soit $\Phi(z)$ une fonction représentée par la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \Phi_m^0(z) \quad . \tag{1}$$

---

[1] *American Journal of Matematics*, t. VII.

[2] M. N. ABRAMESCO a déjà étudié des séries de polynomes vérifiant une relation récurrente plus générale (polynomes de FABER) qui rentre dans la classe (2). Voir *Bollettino dell' Unione matematica italiana*. Anno IV, 1925.

[3] *Bull. de la Soc. des Sciences*, Cluj, Roumanie, t. V, 1re partie, p. 13.

les C_m étant des constantes données et $\Phi^0_m(z)$, $(m = 0, 1, \ldots)$, une suite de fonctions de la variable complexe z, qui vérifient le système récurrent infini

$$P_m(z)\,\Phi^0_m(z) = \sum_{n=1}^{m} Q_{m,n}(z)\,\Phi^0_{m-n}(z) + R_m(z)\ , \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

où $P_m(z)$, $Q_{m,n}(z)$ et $R_m(z)$ sont des polynomes connus de z. Il est facile à voir que toutes les fonctions $\Phi^0_m(z)$ sont rationnelles. En effet, supposant que z est distinct de tous les zéros des polynomes $P_m(z)$, nous pourrons calculer de proche en proche toutes les fonctions $\Phi^0_m(z)$, dont les expressions seront données par la relation [1]

$$\Phi^0_m(z) = \frac{1}{P_0(z)\,P_1(z)\ldots P_m(z)} \begin{vmatrix} Q_{m,1}(z) & Q_{m,2}(z) & \ldots & Q_{m,m}(z) & R_m(z) \\ -P_{m-1}(z) & Q_{m-1,1}(z) & \ldots & Q_{m-1,m-1}(z) & R_{m-1}(z) \\ 0 & -P_{m-2}(z) & \ldots & Q_{m-2,m-2}(z) & R_{m-2}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -P_0(z) & R_0(z) \end{vmatrix} \tag{3}$$

Nous voyons bien que $\Phi^0_m(z)$ apparaît comme un quotient de polynomes. *La série* (1) *est donc une série de fonctions rationnelles qui, dans l'hypothèse faite, est définie formellement d'une manière univoque à partir des polynomes donnés.* C'est des séries de cette forme que nous nous occuperons dans notre article.

1. — Remarques préliminaires.

Considérons la série un peu plus générale

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m C_m\,\Phi^0_m(z)\ , \tag{4}$$

où λ est un paramètre complexe et ρ un nombre réel positif. Si

[1] Obtenue en résolvant par la règle de Cramer le système d'équations linéaires déduit des $(m + 1)$ premières relations de (2).

nous désignons par ρ_1 le rayon de convergence dans le plan λ de la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m C_m \, .$$

le rayon R_1 correspondant à (4) sera évidemment donné par la relation $R_1 = \rho_1 . R$, où R est le rayon de convergence de la série particulière

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m \Phi_m^0(z) \, . \qquad (4')$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité de notre étude, considérer seulement la série (4′) pour laquelle toutes les constantes C_m sont égales à l'unité.

Nous sommes obligés d'introduire dès le début *une condition nécessaire* dans notre recherche: la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m R_m(z) \qquad (5)$$

doit converger uniformément en λ sur un certain cercle C, dont le centre est à l'origine O_λ, ceci quel que soit z appartenant à un domaine simplement connexe D qui contient l'origine O_z. Cette série représente donc une fonction holomorphe de la variable λ sur tout le cercle fermé C. Prenons ρ égal au rayon de ce cercle. Il est évident que dans ces conditions, la série (5) admet un cercle de convergence C_1 dont le rayon est plus grand que ρ.

Posons maintenant $\Phi_m^0(z) = \rho^m . \Phi_m(z)$; nous déduisons de (2) que les nouvelles fonctions $\Phi_m(z)$ satisfont au système récurrent

$$P_m(z)\, \Phi_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{Q_{m,\,n}(z)}{\rho^n} \Phi_{m-n}(z) + \frac{R_m(z)}{\rho^m} \, . \quad (m = 0, 1, \ldots) \qquad (2')$$

De cette manière, nous rattachons le rayon de convergence de notre série (4′) à celui de la série connue (5), ce qui d'ailleurs est inhérent au problème.

2. — Détermination du rayon de convergence R.

Pour déterminer le rayon de convergence R de la série (4′), remarquons que, si l'on peut former *une suite réelle de fonctions positives* [1]

$$\overline{\Phi}_0(z)\,,\ \overline{\Phi}_1(z)\,,\ \ldots\,,\ \overline{\Phi}_m(z)\,,\ \ldots \tag{6}$$

vérifiant sur tout le domaine fermé D, les inégalités $\overline{\Phi}_m(z) \geqq |\,\Phi_m(z)\,|$ $(m \geqq 0)$, la série auxiliaire

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \overline{\Phi}_m(z) \tag{7}$$

admettra dans le plan λ un cercle de convergence de rayon plus petit, au plus égal à celui qui correspond à la série (4′).

Soient $\underline{P}_m(z)$, $\overline{Q}_{m,n}(z)$ et $\overline{R}_m(z)$, trois suites réelles et positives de polynomes ou de fonctions dépendant de z, qui vérifient sur D les inégalités

$$\overline{Q}_{m,n}(z) \geqq |\,Q_{m,n}(z)\,| \qquad \overline{R}_m(z) \geqq |\,R_m(z)\,|\ . \tag{8}$$

$$0 < \underline{P}_m(z) \leqq |\,P_m(z)\,|$$

En les remplaçant dans la relation récurrente (2′), ce qui correspond [2] à une majoration des modules des polynomes donnés du second membre et à une minoration dans le premier membre, il est clair que les fonctions $\overline{\Phi}_m(z)$ qui satisfont à la relation récurrente ainsi obtenue, rentreront dans la catégorie (6) considérée plus haut.

Prenons en particulier

$$\overline{R}_m(z) = R(z)\ , \qquad \overline{Q}_{m,n}(z) = \overline{Q}_{m-n}(z)\ , \tag{9}$$

---

[1] En désignant ces fonctions avec $\overline{\Phi}_m(z)$, nous mettons seulement en évidence leur dépendance du point z, mais il importe de savoir qu'elles sont réelles et positives.

[2] Sur l'axe réel positif.

R (z) étant le maximum sur le cercle C du module de la fonction représentée par la série (5), pour z appartenant à D, et $\overline{Q}_{m-n}(z)$ des polynomes ou des fonctions qui dépendent seulement de la différence $(m - n)$. Pour le premier groupe $\overline{R}_m(z)$, les inégalités correspondantes (9) sont précisément celles de Cauchy que l'on déduit de l'holomorphie de (5) sur le cercle C. Quant aux fonctions $\overline{Q}_{m,n}(z)$, leur choix dépend de la convergence uniforme des séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m Q_{m,m-p}(z) \qquad (p = 0, 1, \ldots) \tag{10}$$

sur tout le cercle fermé C et pour z appartenant à D. Si cette condition est remplie quel que soit p, nous remplacerons les $Q_{m,n}(z)$ respectivement par les maxima $Q_{m-n}(z)$ sur C des fonctions représentées par les séries (10) correspondant aux mêmes valeurs $m - n$ de p.

Passons maintenant aux polynomes $P_m(z)$, que nous supposerons être de la forme [1]

$$P_m(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta_{m,1}}\right)\left(1 - \frac{z}{\zeta_{m,2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\zeta_{m,k}}\right). \tag{11}$$

c'est-à-dire ne s'annulant pas à l'origine [2]. Ils pourront être remplacés par les expressions suivantes

$$\underline{P}_m(z) = \left(1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,1}|}\right)\left(1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,2}|}\right) \cdots \left(1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,k}|}\right) \tag{11'}$$

pourvu que les inégalités (8) soient remplies. Ceci ne sera possible que si z est intérieur au cercle Γ_1 dont le centre est à l'origine O_z et dont le rayon est égal au module du plus proche de O_z zéro

[1] k dépend en général aussi de n.

[2] Si un nombre fini p de zéros des polynomes $P_m(z)$ coïncide avec O_z, multipliant la série (4) par z^p et effectuant sur les $\Phi_m(z)$ quelques transformations analogues à celles employées au § 4°, nous obtenons un système récurrent du type (2′) pour lequel aucun des polynomes $P_m(z)$ ne s'annule à l'origine.

de tous les polynomes $P_m(z)$ car, dans cette hypothèse, nous avons quel que soit m et i,

$$0 < 1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,i}|} \leq \left|1 - \frac{z}{\zeta_{m,i}}\right| .$$

La relation de récurrence (2′) devient après toutes ces modifications

$$\underline{P}_m(z)\,\overline{\Phi}_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\overline{Q}_{m-n}(z)}{\rho^n}\,\overline{\Phi}_{m-n}(z) + \frac{R(z)}{\rho^m} ,$$

d'où, remplaçant m par $m-1$, divisant la relation obtenue par ρ et la soustrayant de la première, nous déduisons

$$\rho\,\underline{P}_m(z)\,\overline{\Phi}_m(z) = \left[\underline{P}_{m-1}(z) + \overline{Q}_{m-1}(z)\right]\overline{\Phi}_{m-1}(z) .$$

En résolvant de proche en proche cette relation récurrente particulière, nous obtenons la série auxiliaire (7) sous la forme

$$R(z) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m \frac{1}{\underline{P}_m(z)} \prod_{i=0}^{m-1} \left[1 + \frac{\overline{Q}_i(z)}{\underline{P}_i(z)}\right] , \tag{12}$$

son rayon de convergence R étant donné par la limite

$$R = \lim_{m\to\infty} \rho \left\{ \frac{\underline{P}_{m-1}(z)}{\underline{P}_m(z)} + \frac{\overline{Q}_{m-1}(z)}{\underline{P}_m(z)} \right\}^{-1} \tag{13}$$

que nous supposerons pour le moment bien déterminée et différente de zéro. Dans cette hypothèse, z étant supposé intérieur au cercle Γ_1, il résulte que la série de fonctions rationnelles (4) converge absolument et uniformément à l'intérieur de tout cercle concentrique au cercle C′

$$|\lambda| = R$$

mais de rayon plus petit. *Elle représente donc une fonction holomorphe de la variable* λ *dans* C′.

La convergence uniforme de la série (4) dans C′ entraîne l'holomorphie de la fonction qu'elle représente, aussi par rapport à z à l'intérieur du cercle Γ_1, résultat qu'on établit à l'aide du théorème classique de Weierstrass qui se réfère aux séries de fonctions holomorphes. *Il résulte donc que la série* (4′) *représente une fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des deux variables* z *et* λ *respectivement à l'intérieur des cercles* Γ_1 *et* C′.

3. — Prolongement analytique dans le plan z.

La méthode utilisée pour établir le caractère effectif de la série (4′) à l'intérieur du cercle Γ_1 peut être employée, après une simple transformation du système récurrent (2′), aussi au prolongement analytique dans le plan z de l'élément de fonction qu'on obtient en développant cette série suivant les puissances entières et positives de z. En effet, supposons que de tout l'ensemble des zéros des polynomes $P_m(z)$ il n'y ait qu'un seul situé sur le cercle Γ_1, le point ζ, qui annule seulement le polynome $P_p(z)$. Nous supposerons de plus que c'est un zéro de degré *un* de multiplicité.

Ceci précisé, remarquons qu'en multipliant la série (4′) par $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$ et effectuant les réductions, le point ζ n'annulera plus les dénominateurs des expressions qui correspondent aux divers coefficients des puissances de λ ainsi modifiés. *Formellement*, le point ζ n'apparaît plus comme un pôle de la fonction représentée par la série (4′) multipliée par le facteur considéré. Nous allons montrer que ceci a lieu aussi d'une manière *effective*. Pour cela, posons

$$\Phi^1_m(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\Phi_m(z) \qquad (m = p\,,\ p+1\,,\ \ldots)$$

et désignons par $P^1_p(z)$ le polynome $P_p(z)$ dans l'expression duquel on aurait supprimé le facteur $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$. Le système récurrent (2′)

pourra alors s'écrire

$$\varrho^m P_m(z)\,\Phi_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \varrho^{m-n} Q_{m,n}(z)\,\Phi_{m-n}(z) + R_m(z)$$

$$(m = 0, 1, \dots p-1)$$

$$\varrho^p P_p^1(z)\,\Phi_p^1(z) = \sum_{n=1}^{p} \varrho^{p-n} Q_{p,n}(z)\,\Phi_{p-n}(z) + R_p(z) \qquad (2'')$$

$$\varrho^m P_m(z)\,\Phi_m^1(z) = \sum_{n=m-p+1}^{m} \varrho^{m-n}\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) Q_{m,n}(z)\,\Phi_{m-n}(z) +$$

$$\sum_{n=0}^{m-p} \varrho^{m-n} Q_{m,n}(z)\,\Phi_{m-n}^1(z) + R_m(z)\,.\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) \qquad (m > p)$$

et nous voyons qu'il rentre dans le même type (2), les racines des polynomes $P_m(z)$ correspondants étant situées à l'extérieur du cercle Γ_1. Soit Γ_2 le cercle concentrique à Γ_1 qui passe par le zéro de la suite

$$P_0(z)\,,\ P_1(z)\,,\ \dots,\ P_{p-1}(z)\,,\ P_p^1(z)\,,\ P_{p-1}(z)\,,\ \dots$$

le plus proche de l'origine. Pour z intérieur à ce cercle, la série

$$\sum_{n=0}^{p-1} \lambda^n \Phi_n(z) + \sum_{m=p}^{\infty} \lambda^m \Phi_m^1(z) \qquad (14)$$

converge uniformément dans le même cercle C', car la limite (13) ne dépend pas de $P_p^1(z)$, et le maximum sur D du facteur $\left(1-\frac{|z|}{|\zeta|}\right)$ est égal à l'unité. Le cercle de convergence de cette série et, par conséquent, aussi le cercle C', ne changent pas si l'on remplace dans (14) les $\Phi_n(z)$, $(n = 0, 1, \dots p-1)$, par d'autres fonctions $\Phi_n^1(z)$ vérifiant les relations

$$\Phi_n^1(z) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right).\Phi_n(z) \qquad (n = 0, 1, \dots p-1)\,.$$

Nous pouvons alors écrire d'une manière effective, pour z intérieur à Γ_2,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \Phi_m(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n^1(z) \right],$$

les $\Phi_m(z)$ étant précisément les fonctions rationnelles (3), et comme la série du second membre représente une fonction holomorphe par rapport aux deux variables z et λ respectivement dans Γ_2 et C', *il résulte que le point* ζ *est effectivement un pôle pour la fonction définie par la série* (4').

Ce procédé s'applique évidemment aussi dans le cas où il y aurait encore d'autres zéros $\zeta_{m,i}$ en nombre fini sur le cercle Γ_1, quels que soient leurs ordres de multiplicité. Il faut bien entendu supposer que les zéros $\zeta_{m,i}$ n'annulent pas une infinité de polynomes $P_m(z)$.

4. — Existence du rayon de convergence R.

Indiquons maintenant les cas simples où le rayon R existe et est bien déterminé. Nous supposerons bien entendu que les cercles Γ_i introduits dans le paragraphe précédent, appartiennent *entièrement* au domaine d'existence D relatif aux fonctions (5) et (10).

Ier cas. — Les polynomes $P_m(z)$ *tendent uniformément vers un polynome* P (z) *ou vers une fonction entière de genre zéro.* Dans ce cas, les racines de la fonction $P(z)$ apparaissent comme des points singuliers essentiels pour *la fonction représentée par la série* (4'), *qui est méromorphe dans le cercle* Γ, *de centre* O_z, *passant par le plus proche de l'origine zéro de* P(z). Nous ne pouvons établir avec la méthode de prolongement analytique introduite, le caractère effectif de la série (4') à l'extérieur de Γ.

Dans toutes ces considérations, il faut tenir compte évidemment de la fonction limite $\overline{Q}(z)$ relative à la suite des maxima $\overline{Q}_m(z)$. Nous reviendrons dans un autre article pour préciser la nature de cette fonction.

IIme *cas.* — *Les polynomes* $P_m(z)$, *multipliés par des fonctions exponentielles analogues à celles de Weierstrass-Picard, tendent uniformément vers une fonction uniforme* P (z) *qui peut admettre des points singuliers essentiels à distance finie.*

Ce cas nous a conduits à une généralisation des produits infinis de WEIERSTRASS ou de M. PICARD, qui s'introduit d'une manière naturelle dans notre étude. La limite (13) n'ayant plus de sens dans notre cas, il a fallu multiplier les deux membres de la relation récurrente (2′) par une fonction exponentielle convenable, ce qui nous a conduits à d'autres séries (5) et (10), mais qui définissent aussi des fonctions holomorphes sur D si les anciennes possèdent cette propriété. Nous avons ensuite suivi la même voie que dans les paragraphes précédents obtenant pour R une expression limite analogue à (13), bien déterminée dans la plupart des cas. Les mêmes conclusions peuvent être tirées comme dans le cas précédent.

Avant de terminer, remarquons que le prolongement analytique introduit n'est applicable que si l'expression limite (13), ou son analogue du deuxième cas, conserve un sens pour z intérieur aux cercles Γ_i. Il résulte de là que tout zéro de la fonction $P(z)$ ainsi que tout point singulier des fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ arrêtent le prolongement, ces points apparaissant comme des points singuliers essentiels pour la fonction représentée par la série (4′).

Nous reviendrons dans un mémoire plus détaillé sur toutes les questions laissées de côté ou seulement mentionnées, mémoire dans lequel nous essaierons de nous affranchir complètement du caractère *local* de cette étude, la méromorphie de la fonction représentée par la série (4′) n'étant établie que dans des domaines particuliers, les cercles Γ_i, rattachés à l'origine du plan z.

Juillet 1931.