Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1931)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES SÉRIES DE FONCTIONS RATIONNELLES
Autor: Badesco, Radu
Kapitel: 2. – DÉTERMINATION DU RAYON DE CONVERGENCE R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23894

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2. — Détermination du rayon de convergence R.

Pour déterminer le rayon de convergence R de la série (4′), remarquons que, si l'on peut former *une suite réelle de fonctions positives* [1]

$$\overline{\Phi}_0(z)\,,\ \overline{\Phi}_1(z)\,,\ \ldots\,,\ \overline{\Phi}_m(z)\,,\ \ldots \tag{6}$$

vérifiant sur tout le domaine fermé D, les inégalités $\overline{\Phi}_m(z) \geqq |\,\Phi_m(z)\,|$ $(m \geqq 0)$, la série auxiliaire

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \overline{\Phi}_m(z) \tag{7}$$

admettra dans le plan λ un cercle de convergence de rayon plus petit, au plus égal à celui qui correspond à la série (4′).

Soient $\underline{P}_m(z)$, $\overline{Q}_{m,n}(z)$ et $\overline{R}_m(z)$, trois suites réelles et positives de polynomes ou de fonctions dépendant de z, qui vérifient sur D les inégalités

$$\overline{Q}_{m,n}(z) \geqq |\,Q_{m,n}(z)\,| \qquad \overline{R}_m(z) \geqq |\,R_m(z)\,|\ . \tag{8}$$

$$0 < \underline{P}_m(z) \leqq |\,P_m(z)\,|$$

En les remplaçant dans la relation récurrente (2′), ce qui correspond [2] à une majoration des modules des polynomes donnés du second membre et à une minoration dans le premier membre, il est clair que les fonctions $\overline{\Phi}_m(z)$ qui satisfont à la relation récurrente ainsi obtenue, rentreront dans la catégorie (6) considérée plus haut.

Prenons en particulier

$$\overline{R}_m(z) = R(z)\ , \qquad \overline{Q}_{m,n}(z) = \overline{Q}_{m-n}(z)\ , \tag{9}$$

---

[1] En désignant ces fonctions avec $\overline{\Phi}_m(z)$, nous mettons seulement en évidence leur dépendance du point z, mais il importe de savoir qu'elles sont réelles et positives.

[2] Sur l'axe réel positif.

R (z) étant le maximum sur le cercle C du module de la fonction représentée par la série (5), pour z appartenant à D, et $\overline{Q}_{m-n}(z)$ des polynomes ou des fonctions qui dépendent seulement de la différence $(m - n)$. Pour le premier groupe $\overline{R}_m(z)$, les inégalités correspondantes (9) sont précisément celles de Cauchy que l'on déduit de l'holomorphie de (5) sur le cercle C. Quant aux fonctions $\overline{Q}_{m,n}(z)$, leur choix dépend de la convergence uniforme des séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m Q_{m,m-p}(z) \qquad (p = 0, 1, \ldots) \tag{10}$$

sur tout le cercle fermé C et pour z appartenant à D. Si cette condition est remplie quel que soit p, nous remplacerons les $Q_{m,n}(z)$ respectivement par les maxima $Q_{m-n}(z)$ sur C des fonctions représentées par les séries (10) correspondant aux mêmes valeurs $m - n$ de p.

Passons maintenant aux polynomes $P_m(z)$, que nous supposerons être de la forme [1]

$$P_m(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta_{m,1}}\right)\left(1 - \frac{z}{\zeta_{m,2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\zeta_{m,k}}\right). \tag{11}$$

c'est-à-dire ne s'annulant pas à l'origine [2]. Ils pourront être remplacés par les expressions suivantes

$$\underline{P}_m(z) = \left(1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,1}|}\right)\left(1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,2}|}\right) \cdots \left(1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,k}|}\right) \tag{11'}$$

pourvu que les inégalités (8) soient remplies. Ceci ne sera possible que si z est intérieur au cercle Γ_1 dont le centre est à l'origine O_z et dont le rayon est égal au module du plus proche de O_z zéro

[1] k dépend en général aussi de n.

[2] Si un nombre fini p de zéros des polynomes $P_m(z)$ coïncide avec O_z, multipliant la série (4) par z^p et effectuant sur les $\Phi_m(z)$ quelques transformations analogues à celles employées au § 4°, nous obtenons un système récurrent du type (2′) pour lequel aucun des polynomes $P_m(z)$ ne s'annule à l'origine.

de tous les polynomes $P_m(z)$ car, dans cette hypothèse, nous avons quel que soit m et i,

$$0 < 1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,i}|} \leq \left|1 - \frac{z}{\zeta_{m,i}}\right| .$$

La relation de récurrence (2′) devient après toutes ces modifications

$$\underline{P}_m(z)\,\overline{\Phi}_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\overline{Q}_{m-n}(z)}{\rho^n}\,\overline{\Phi}_{m-n}(z) + \frac{R(z)}{\rho^m} ,$$

d'où, remplaçant m par $m-1$, divisant la relation obtenue par ρ et la soustrayant de la première, nous déduisons

$$\rho\,\underline{P}_m(z)\,\overline{\Phi}_m(z) = \left[\underline{P}_{m-1}(z) + \overline{Q}_{m-1}(z)\right]\overline{\Phi}_{m-1}(z) .$$

En résolvant de proche en proche cette relation récurrente particulière, nous obtenons la série auxiliaire (7) sous la forme

$$R(z) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m \frac{1}{\underline{P}_m(z)} \prod_{i=0}^{m-1} \left[1 + \frac{\overline{Q}_i(z)}{\underline{P}_i(z)}\right] , \tag{12}$$

son rayon de convergence R étant donné par la limite

$$R = \lim_{m\to\infty} \rho \left\{ \frac{\underline{P}_{m-1}(z)}{\underline{P}_m(z)} + \frac{\overline{Q}_{m-1}(z)}{\underline{P}_m(z)} \right\}^{-1} \tag{13}$$

que nous supposerons pour le moment bien déterminée et différente de zéro. Dans cette hypothèse, z étant supposé intérieur au cercle Γ_1, il résulte que la série de fonctions rationnelles (4) converge absolument et uniformément à l'intérieur de tout cercle concentrique au cercle C′

$$|\lambda| = R$$

mais de rayon plus petit. *Elle représente donc une fonction holomorphe de la variable* λ *dans* C′.

La convergence uniforme de la série (4) dans C′ entraîne l'holomorphie de la fonction qu'elle représente, aussi par rapport à z à l'intérieur du cercle Γ_1, résultat qu'on établit à l'aide du théorème classique de Weierstrass qui se réfère aux séries de fonctions holomorphes. *Il résulte donc que la série* (4′) *représente une fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des deux variables* z *et* λ *respectivement à l'intérieur des cercles* Γ_1 *et* C′.

3. — Prolongement analytique dans le plan z.

La méthode utilisée pour établir le caractère effectif de la série (4′) à l'intérieur du cercle Γ_1 peut être employée, après une simple transformation du système récurrent (2′), aussi au prolongement analytique dans le plan z de l'élément de fonction qu'on obtient en développant cette série suivant les puissances entières et positives de z. En effet, supposons que de tout l'ensemble des zéros des polynomes $P_m(z)$ il n'y ait qu'un seul situé sur le cercle Γ_1, le point ζ, qui annule seulement le polynome $P_p(z)$. Nous supposerons de plus que c'est un zéro de degré *un* de multiplicité.

Ceci précisé, remarquons qu'en multipliant la série (4′) par $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$ et effectuant les réductions, le point ζ n'annulera plus les dénominateurs des expressions qui correspondent aux divers coefficients des puissances de λ ainsi modifiés. *Formellement*, le point ζ n'apparaît plus comme un pôle de la fonction représentée par la série (4′) multipliée par le facteur considéré. Nous allons montrer que ceci a lieu aussi d'une manière *effective*. Pour cela, posons

$$\Phi^1_m(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\Phi_m(z) \qquad (m = p\,,\ p+1\,,\ \ldots)$$

et désignons par $P^1_p(z)$ le polynome $P_p(z)$ dans l'expression duquel on aurait supprimé le facteur $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$. Le système récurrent (2′)