3. — Prolongement analytique dans le plan z.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

La convergence uniforme de la série (4) dans C′ entraîne l'holomorphie de la fonction qu'elle représente, aussi par rapport à z à l'intérieur du cercle Γ_1, résultat qu'on établit à l'aide du théorème classique de Weierstrass qui se réfère aux séries de fonctions holomorphes. *Il résulte donc que la série* (4′) *représente une fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des deux variables* z *et* λ *respectivement à l'intérieur des cercles* Γ_1 *et* C′.

3. — Prolongement analytique dans le plan z.

La méthode utilisée pour établir le caractère effectif de la série (4′) à l'intérieur du cercle Γ_1 peut être employée, après une simple transformation du système récurrent (2′), aussi au prolongement analytique dans le plan z de l'élément de fonction qu'on obtient en développant cette série suivant les puissances entières et positives de z. En effet, supposons que de tout l'ensemble des zéros des polynomes $P_m(z)$ il n'y ait qu'un seul situé sur le cercle Γ_1, le point ζ, qui annule seulement le polynome $P_p(z)$. Nous supposerons de plus que c'est un zéro de degré *un* de multiplicité.

Ceci précisé, remarquons qu'en multipliant la série (4′) par $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$ et effectuant les réductions, le point ζ n'annulera plus les dénominateurs des expressions qui correspondent aux divers coefficients des puissances de λ ainsi modifiés. *Formellement*, le point ζ n'apparaît plus comme un pôle de la fonction représentée par la série (4′) multipliée par le facteur considéré. Nous allons montrer que ceci a lieu aussi d'une manière *effective*. Pour cela, posons

$$\Phi^1_m(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\Phi_m(z) \qquad (m = p\,,\ p+1\,,\ \ldots)$$

et désignons par $P^1_p(z)$ le polynome $P_p(z)$ dans l'expression duquel on aurait supprimé le facteur $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$. Le système récurrent (2′)

pourra alors s'écrire

$$\varrho^m P_m(z)\,\Phi_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \varrho^{m-n} Q_{m,n}(z)\,\Phi_{m-n}(z) + R_m(z)$$

$$(m = 0, 1, \dots p-1)$$

$$\varrho^p P_p^1(z)\,\Phi_p^1(z) = \sum_{n=1}^{p} \varrho^{p-n} Q_{p,n}(z)\,\Phi_{p-n}(z) + R_p(z) \qquad (2'')$$

$$\varrho^m P_m(z)\,\Phi_m^1(z) = \sum_{n=m-p+1}^{m} \varrho^{m-n}\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) Q_{m,n}(z)\,\Phi_{m-n}(z) +$$

$$\sum_{n=0}^{m-p} \varrho^{m-n} Q_{m,n}(z)\,\Phi_{m-n}^1(z) + R_m(z)\,.\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) \qquad (m > p)$$

et nous voyons qu'il rentre dans le même type (2), les racines des polynomes $P_m(z)$ correspondants étant situées à l'extérieur du cercle Γ_1. Soit Γ_2 le cercle concentrique à Γ_1 qui passe par le zéro de la suite

$$P_0(z)\,,\ P_1(z)\,,\ \dots,\ P_{p-1}(z)\,,\ P_p^1(z)\,,\ P_{p-1}(z)\,,\ \dots$$

le plus proche de l'origine. Pour z intérieur à ce cercle, la série

$$\sum_{n=0}^{p-1} \lambda^n \Phi_n(z) + \sum_{m=p}^{\infty} \lambda^m \Phi_m^1(z) \qquad (14)$$

converge uniformément dans le même cercle C', car la limite (13) ne dépend pas de $P_p^1(z)$, et le maximum sur D du facteur $\left(1-\frac{|z|}{|\zeta|}\right)$ est égal à l'unité. Le cercle de convergence de cette série et, par conséquent, aussi le cercle C', ne changent pas si l'on remplace dans (14) les $\Phi_n(z)$, $(n = 0, 1, \dots p-1)$, par d'autres fonctions $\Phi_n^1(z)$ vérifiant les relations

$$\Phi_n^1(z) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right).\Phi_n(z) \qquad (n = 0, 1, \dots p-1)\,.$$

Nous pouvons alors écrire d'une manière effective, pour z intérieur à Γ_2,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \Phi_m(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n^1(z) \right],$$

les $\Phi_m(z)$ étant précisément les fonctions rationnelles (3), et comme la série du second membre représente une fonction holomorphe par rapport aux deux variables z et λ respectivement dans Γ_2 et C', *il résulte que le point* ζ *est effectivement un pôle pour la fonction définie par la série* (4').

Ce procédé s'applique évidemment aussi dans le cas où il y aurait encore d'autres zéros $\zeta_{m,i}$ en nombre fini sur le cercle Γ_1, quels que soient leurs ordres de multiplicité. Il faut bien entendu supposer que les zéros $\zeta_{m,i}$ n'annulent pas une infinité de polynomes $P_m(z)$.

4. — Existence du rayon de convergence R.

Indiquons maintenant les cas simples où le rayon R existe et est bien déterminé. Nous supposerons bien entendu que les cercles Γ_i introduits dans le paragraphe précédent, appartiennent *entièrement* au domaine d'existence D relatif aux fonctions (5) et (10).

Ier cas. — Les polynomes $P_m(z)$ *tendent uniformément vers un polynome* P (z) *ou vers une fonction entière de genre zéro.* Dans ce cas, les racines de la fonction $P(z)$ apparaissent comme des points singuliers essentiels pour *la fonction représentée par la série* (4'), *qui est méromorphe dans le cercle* Γ, *de centre* O_z, *passant par le plus proche de l'origine zéro de* P(z). Nous ne pouvons établir avec la méthode de prolongement analytique introduite, le caractère effectif de la série (4') à l'extérieur de Γ.

Dans toutes ces considérations, il faut tenir compte évidemment de la fonction limite $\overline{Q}(z)$ relative à la suite des maxima $\overline{Q}_m(z)$. Nous reviendrons dans un autre article pour préciser la nature de cette fonction.