Harris Hancock. — Foundations of the Theory of Algebric Numbers. — Volume I. Introduction to the generai Theory. — Un volume in-8° de xxvii-602 pages. Prix: $8.00. The Macmillan Company, New-York, 1931

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

quelle richesse dans celui-ci. Ainsi la droite complexe équivaut au plan de Cauchy. Des *antiinvolutions* conduisent déjà à des notions métriques car leur itération s'exprime par une expression exponentielle; au *produit* des transformations correspondent, en exposant, des propriétés additives qui sont celles appartenant aux *distances*.

Ecrire les variables, dans les transformations (1), est d'importance secondaire. L'essentiel est dans le tableau des coefficients, c'est-à-dire en des *matrices* dont le produit, en général, n'est pas commutatif. Il n'y a là aucune généralisation scabreuse; cette non-commutativité se retrouve partout comme accompagnant l'homogénéité, car les équations (1) sont homogènes. Si les transformations, sous la forme matricielle, peuvent être décomposées en facteurs matriciels plus simples, comme c'est déjà le cas pour les rotations euclidiennes, nous pénétrons l'essence, le substratum de ces transformations comme on pénètre la structure des nombres entiers ordinaires en les décomposant en facteurs premiers. Quelle belle justification de l'aphorisme qui veut que la découverte d'une harmonie numérique soit aussi importante que l'élaboration d'une cosmogonie.

On voit quel merveilleux instrument de synthèse et d'analyse est constitué par le groupe (1), ce que la première partie de l'ouvrage, consacré à la droite projective complexe, suffit à montrer. Mais les horizons s'élargissent encore et presque à perte de vue dans une deuxième partie consacrée à la géométrie projective complexe à plusieurs dimensions. C'est ici que l'espace riemannien prend de nombreuses propriétés de symétrie qu'on est loin de soupçonner si l'on s'en tient à sa définition générale. Entre cet espace général et l'espace euclidien ordinaire, les comparaisons sont lointaines. Que de détails riemanniens s'évanouissent dans la géométrie d'Euclide; ils se conservent mieux dans les cas intermédiaires des géométries hermitiennes elliptique ou hyperbolique et peuvent aussi correspondre à des géométries souvent étudiées à part telles celle du complexe linéaire ou celle des sphères orientées. C'est d'ailleurs la possibilité de l'insertion de ces géométries intermédiaires qui rattache à la Gravifique générale les théories quantiques ou, ce qui revient au même, la Mécanique ondulatoire. M. Elie Cartan ne s'est pas engagé dans ces considérations physiques proprement dites mais il a écrit un dernier chapitre qui permettrait facilement de raccorder son bel exposé avec ceux de Weyl ou de Wigner analysés plus haut (pp. 163-165). Certes les théories quantiques et ondulatoires sont d'un merveilleux intérêt mais, après avoir étudié l'exposé de M. Cartan, on peut se demander si presque tout cet intérêt ne vient pas de la Géométrie pure. A. Buhl (Toulouse).

Harris Hancock. — **Foundations of the Theory of Algebric Numbers.** — Volume I. Introduction to the general Theory. — Un volume in-8° de xxvii-602 pages. Prix: $8.00. The Macmillan Company, New-York, 1931.

Admirable ouvrage précédé d'une Introduction que j'ai d'abord eu envie de traduire purement et simplement. Je ne le ferai cependant pas; la critique bibliographique doit être plus originale mais c'est avec une satisfaction non dissimulée que je vois confirmer, une fois de plus, par un des maîtres de l'Analyse algébrique et de l'Arithmétique supérieure, les vues esthétiques et les aperçus philosophiques qui ont toujours été défendus ici. L'Arithmétique est un don divin (a divine gift) touchant à la Science d'un côté, à la Philosophie de l'autre; bien que la vérité semble souvent être un vain mot,

c'est dans un tel domaine qu'on peut, le plus solidement, s'imaginer la voir et la saisir. D'autre part les harmonies numériques générales semblent bientôt prendre une valeur cosmologique s'accordant avec les grandioses théories tendant, telles celle d'Einstein, à peindre mathématiquement les traits essentiels de la Nature. Ce n'est pas moi qui introduis ici Einstein; c'est M. Harris Hancock (p. VIII). La discussion est portée à une hauteur qui impose le rapprochement. Les nombres algébriques, qu'on peut se représenter d'abord comme racines d'équations algébriques à une inconnue, appartiennent, plus généralement, à des courbes, à des surfaces, à des variétés algébriques. Et l'analyse des variétés algébriques ne va pas sans le même appareil analytique que celui qui est nécessaire aux développements électromagnétiques et gravifiques. L'Univers est Nombre, comme le voulait l'intuition hellène mais il faut savoir entendre le mot Nombre avec des généralisations, des ascensions successives qui laissent dans un monde vulgaire et singulièrement restreint les nombres seuls connus de beaucoup de praticiens, d'ailleurs non dénués de mérite. Le bel ouvrage de M. Hancock invite à ces ascensions successives et ce par des méthodes simplifiées, avec une foule d'énoncés sous lesquels on retrouve aisément les trames arithmétiques élémentaires. Les éléments qui constituent ces dernières trames vivent d'une vie nouvelle et d'abord insoupçonnée comme il arrive des éléments géométriques vulgaires lorsqu'on tente de les transporter dans des espaces de plus en plus complexes. On a souvent demandé s'il était loisible de construire des arithmétiques généralisées qui seraient à l'arithmétique ordinaire ce que les géométries non-euclidiennes sont à la géométrie d'Euclide. Or la Théorie des nombres algébriques répond, dans une large mesure, à cet esprit de curiosité. Et elle s'idéalise si bien que l'un de ses principaux concepts est celui de symboles qualifiés de symboles idéaux ou simplement d'*idéaux*. Ces idéaux interviennent surtout en matière de factorisation, celle-ci cessant d'être unique par l'adjonction de divers domaines de rationalité. Ainsi

$$21 = (5 + 2)(5 - 2) = \left(1 + 2\sqrt{-5}\right)\left(1 - 2\sqrt{-5}\right)$$

mais ce n'est là qu'une petite chose au delà de laquelle on peut attendre des développements plus grands encore que ceux associés aux imaginaires en i. L'exemple reproduit n'empêche nullement qu'il y ait une factorisation unique des idéaux par idéaux *premiers*. Fermat, Gauss, Wilson, par éclairs géniaux, utilisèrent cette merveilleuse souplesse de l'Arithmétique supérieure, d'où des théorèmes bien connus qui semblent prendre une place de plus en plus naturelle dans des exposés méthodiques tels que celui de M. Hancock. Faut-il mentionner aussi qu'il y a un algorithme d'Euclide sur la factorisation, que cette notion a eu des définitions imparfaites ou équivoques qui semblaient parfois opposer « divisible par » à « être contenu en ». Cela ne rappelle-t-il pas les produits matriciels à facteurs non commutatifs ? Des généralisations convenables, bien arrêtées aujourd'hui, ont définitivement apporté la lumière sur ces paradoxes ou ces prétendus paradoxes.

Voilà, au hasard, quelques points saillants d'un très beau volume qui contient des centaines d'autres points aussi intéressants. Les plus grands noms, Legendre, Dedekind, Kronecker, Jacobi, Kummer, Hermite, Poincaré, Klein, Dickson, Hilbert, Minkowski défilent, dans un éblouissement de prodiges, en quatorze chapitres qui aboutissent à une présentation géomé-

trique des idéaux en des domaines imaginaires ou réels. Ce sont alors les idées de Klein et de Poincaré sur les groupes linéaires ou automorphes à domaines non-euclidiens. Et tout cela, répétons-le, est déduit du Nombre et de ces harmonies, de ces identités entre nombres dont la recherche et l'étude, tout en remontant à l'Antiquité, sont plus que jamais à poursuivre, toute notable découverte, dans cet ordre d'idées, valant, répétons-le, autant qu'une cosmogonie. A. Buhl (Toulouse).

Leon Lichtenstein. — **Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen.** — Un vol. gr. in-8° de x-164 pages. Prix: Rm. 16,80. Julius Springer, Berlin, 1931.

Analyse d'approximations qui est bien dans la note de la science actuelle. La méthode variationnelle appliquée à des équations différentielles de première approximation, pour en atteindre une seconde, est aussi ancienne que la Mécanique céleste. Elle s'est précisée avec les équations aux variations dues à Henri Poincaré. Ici ce sont les équations intégrales ordinaires, complétées par un terme perturbateur (qui peut d'ailleurs dépendre de la fonction inconnue) qui prendront, ainsi complétées, une forme non linéaire pour laquelle on s'efforcera de faire varier les solutions classiques. Problèmes difficiles, résolus d'abord « en petit », c'est-à-dire quand le terme perturbateur est minime. Il faut aussi que ce terme ait des formes appropriées mais on constate bientôt que cette dernière condition, loin de diminuer l'intérêt est plutôt de nature à l'augmenter car la recherche des formes appropriées est d'une plasticité tout à fait remarquable. De plus, les théories possibles obtenues, ainsi qu'il arrive si souvent en Mathématiques, sont, comme on le voit au second chapitre, justement celles qui correspondent à d'importants problèmes posés par la Géométrie, la Mécanique et la Physique. Et M. Lichtenstein montre tout ceci avec beaucoup d'art et d'aisance, n'encadrant rien, qui ne paraisse très naturellement encadré. Les conditions d'analyticité, de régularité, de convergence uniforme suffisent à de délicates délimitations obtenues en des voies plus détournées par A. Liapounoff, E. Schmidt et quelques autres précurseurs. Les équations intégrodifférentielles non linéaires qui se laissent ramener à des équations intégrales également non linéaires (mais enfin qui ne sont qu'intégrales) donnent lieu à des considérations avoisinant les recherches de Liouville sur les équations du second ordre.

Les applications du chapitre II ont trait à la propagation d'ondes superficielles d'amplitude finie étudiés par M. Levi-Civita non sans contact avec des lemmes de M. Emile Picard. La théorie du rayonnement admet des rapprochements de même nature englobant des travaux de MM. Carleman, S. Bernstein, Nekrassow. Remarques analogues pour $\Delta z = F(x, y, z, p, q)$ avec questions aux limites y associées. A remarquer encore le cas où F est représenté par une intégrale triple de construction très symétrique, celui ou F ne contient ni p ni q et enfin l'équation $\Delta z = ke^z$ (Picard, Poincaré, Bieberbach, Le Roy, Bernstein...) sur laquelle M. Picard est précisément revenu dans le volume placé en tête de cette bibliographie.

Le chapitre III traite de quelques classes d'équations intégrodifférentielles qui ne se laissent pas ramener à des systèmes intégraux même non linéaires. Ces questions ont de profondes racines dans le passé avec les équations aux