V. Formes de Pfaff semi-normales.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

formule très générale à laquelle on peut donner bien des formes, par exemple [1]

$$K = \frac{\Lambda\,\Delta f - 2\overline{\Lambda f}^2 - 2\,\Delta'(f,\ \Lambda f) - 4\,\Sigma f}{2\,\Delta f}\ .$$

V. Formes de Pfaff semi-normales.

11. Dans la géométrie euclidienne des surfaces (c'est-à-dire la géométrie des surfaces pourvues de la connexion euclidienne induite de l'espace ambiant, soit l'ordinaire géométrie riemannienne sur la surface), on a avantage à considérer, plutôt que la forme $\varpi_0 = df$, la forme

$$\varpi_1 = \frac{df}{\sqrt{\Delta f}} = x_1\,\varpi_0 \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \tag{53}$$

Le système formé d'une équation $\varpi = 0$ et du ds^2 est en effet équivalent, pour les transformations conformes, à cette seule forme ϖ_1, normée vis-à-vis du ds^2, de sorte que les invariants de cette forme soient ceux du système indiqué. Nous dirons que la forme ϖ_1 est *canonique* pour le ds^2, ou *semi-normale* (on pourrait encore dire *unitaire*); le facteur x_1, la normant ainsi à partir de la forme ϖ_0, a pour effet de ramener à l'unité le seminvariant du 1er ordre S_1 de la forme ϖ_1. Les invariants de ϖ_1 indépendants de x_1 sont les invariants de l'équation $\varpi = 0$; les autres invariants de ϖ_1 sont des semi-invariants ou des invariants gaussiens.

Les opérateurs différentiels du 1er ordre de ϖ_1 sont

$$\mathcal{D}_1 = \sqrt{\Delta f}\,\mathcal{D}_0 \qquad \mathcal{E}_1 = \sqrt{\Delta f}\,\mathcal{E}_0 \tag{54}$$

et pour l'opérateur $\mathcal{L}_1$ du 2me ordre, on a

$$\mathcal{L}_1 = \Delta f\,.\,\mathcal{L}_0\ . \tag{55}$$

---

[1] Au moyen des formules

$$\Delta'(f,\ \Omega f) = \frac{\Delta'(f,\ \Lambda f)}{\Delta f} - \frac{\Delta'' f\,.\,\Lambda f}{\overline{\Delta f}^2} \qquad \Lambda \log \Delta f = \frac{\Lambda\,\Delta f}{\Delta f} - \frac{\Delta^2 f}{\overline{\Delta f}^2} \qquad \Sigma f = \frac{\Delta^2 f - 2\,\Delta'' f\,.\,\Lambda f}{4\,\Delta f}$$

Pour un faisceau de lignes parallèles, avec $\Delta f = 1$, on retrouve la formule connue

$$K = -\,\overline{\Lambda f}^2 - \Delta'(f,\ \Lambda f)\ .$$

Pour un faisceau isotherme, avec $\Lambda f = \Omega f = 0$

$$K = \Lambda \log \sqrt{\Delta f}\ .$$

Par suite, si on introduit les vecteurs unitaires

$$\mathbf{d} = \frac{\nabla f}{\sqrt{\Delta f}} \qquad \mathbf{t} = \mathrm{J}\,\mathbf{d} \tag{56}$$

on obtient pour les paramètres différentiels les expressions suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{D}_1 z &= \frac{\Delta'(f,\ z)}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{dz}{ds_d} = \mathbf{d} \times \nabla z \\ \mathcal{T}_1 z &= \frac{\Theta'(f,\ z)}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{dz}{ds_t} = [\mathbf{d}\,.\,\nabla z] = \mathbf{t} \times \nabla z \\ \mathcal{L}_1 z &= \Lambda z = \left(\frac{d^2}{ds_d^2} + \frac{d^2}{ds_t^2} + \mathrm{D}_1 \frac{d}{ds_d} + \mathrm{T}_1 \frac{d}{ds_t}\right) z = \operatorname{div} \nabla z \end{aligned}\right. \tag{57}$$

et aussi

$$(\mathcal{D}_1 \mathcal{T}_1) z = \left(\frac{d^2}{ds_t\, ds_d} - \frac{d^2}{ds_d\, ds_t}\right) z = \left(\mathrm{T}_1 \frac{d}{ds_d} - \mathrm{D}_1 \frac{d}{ds_t}\right) z$$

$$\frac{d^2}{ds_i\, ds_j} = \frac{d}{ds_j} \frac{d}{ds_i}\,.$$

12. L'on a en particulier

$$\mathcal{D}_1 f = \sqrt{\Delta f} = \frac{df}{ds_d} \qquad \mathcal{T}_1 f = \frac{df}{ds_t} = 0$$

et les invariants du 2me ordre, D_1 et T_1, de la forme semi-normale, sont donnés par les formules (24) ou (33) suivant

$$-\frac{d^2 f}{ds_d\, ds_t} = \mathrm{T}_1 \frac{df}{ds_d} \qquad \Lambda f = \frac{d^2 f}{ds_d^2} + \mathrm{D}_1 \frac{df}{ds_d}$$

soit

$$\mathrm{D}_1 = \sqrt{\Delta f}\,.\,\Omega f - \frac{\Delta'(f,\ \sqrt{\Delta f})}{\Delta f} \qquad \mathrm{T}_1 = -\frac{\Theta'(f,\ \sqrt{\Delta f})}{\Delta f} \tag{58}$$

ou encore

$$\mathrm{D}_1 = -\frac{\Delta'' f - 2\Delta f\,.\,\Lambda f}{2\,\Delta f^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\Gamma f}{2\,\Delta f^{\frac{3}{2}}} \qquad \mathrm{T}_1 = -\frac{\Theta'' f}{2\,\Delta f^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{58'}$$

On reconnaît en D_1 et T_1 les courbures géodésiques des courbes $\varpi = 0$ et de leurs trajectoires orthogonales, mesurées respectivement suivant les normales $(-\mathbf{d})$ et $(-\mathbf{t})$ à ces courbes; en considérant au

contraire **t** et **d** comme les tangentes positives à ces courbes, g_t et g_d étant les courbures mesurées suivant les normales (— **d**) et **t**, on aurait

$$D_1 = g_t \qquad T_1 = -g_d \,. \tag{59}$$

Par les formules (27), on obtenait, en utilisant (49) et (38′)

$$\left\{\begin{aligned} D_1 &= \mathcal{D}_1 \log W + \mathcal{T}_1 \varphi = \frac{\Delta'(f, \log W) + \Theta'(f, \varphi)}{\sqrt{\Delta f}} \\ &= \frac{d \log W}{ds_d} + \frac{d\varphi}{ds_t} = \mathbf{d} \times \nabla \log W + \mathbf{t} \times \nabla \varphi \\ T_1 &= \mathcal{T}_1 \log W - \mathcal{D}_1 \varphi = \frac{\Theta'(f, \log W) - \Delta'(f, \varphi)}{\sqrt{\Delta f}} \\ &= \frac{d \log W}{ds_t} - \frac{d\varphi}{ds_d} = \mathbf{t} \times \nabla \log W - \mathbf{d} \times \nabla \varphi \,. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

On reconnait dans ces formules le rôle des deux vecteurs (formant simili-repère).

$$\mathbf{f}_1 = \nabla \varphi + J \nabla \log W \qquad \mathbf{g}_1 = J\mathbf{f}_1 = -\nabla \log W + J \nabla \varphi \tag{61}$$

qui permettent d'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{f}_1 = -T_1 \mathbf{d} + D_1 \mathbf{t} \qquad && \mathbf{g}_1 = -D_1 \mathbf{d} - T_1 \mathbf{t} \\ &D_1 = -\mathbf{d} \times \mathbf{g}_1 && T_1 = -\mathbf{t} \times \mathbf{g}_1 \,; \end{aligned}\right. \tag{62}$$

en particulier

$$\mathbf{g}_1 = -\Omega f . \nabla f + \frac{1}{2} \nabla \log \Delta f \,. \tag{63}$$

13. Nous avons en effet indiqué *(Thèse)* qu'à un faisceau simple de courbes est associé le *réseau angulaire* des courbes coupant celles du faisceau sous des angles constants et montré que les propriétés de courbure géodésique de ce réseau sont résumées en ces vecteurs; φ est, comme le montre la formule (49), l'angle de la normale **d** d'une courbe du faisceau $\varpi = 0$ avec la courbe du faisceau isotherme $dY = 0$ qui la coupe au point considéré, donc avec la normale au même point à la courbe du faisceau isotherme $dX = 0$.

Les formules (61) mettent bien en évidence deux éléments géométriques importants: d'une part, le module W de la représentation conforme entre le (ds^2 euclidien) $dl^2 = dX^2 + dY^2$ suivant lequel on peut représenter le ds^2 considéré, et ce ds^2; d'autre part, l'angle φ qui caractérise le faisceau en question, et par suite aussi le réseau angulaire associé.

Sans insister pour le moment sur les opérateurs du 2e ordre $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_1$, nous donnons, en tenant compte de

$$P_1 = \frac{P_0}{\Delta f} = \frac{W^2}{4}$$

les expressions des invariants du 3e ordre de la forme semi-normale ϖ_1

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Lambda\varphi = \operatorname{div} \mathbf{f}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{g}_1 \qquad (64)$$

$$k_1 = K = -\Lambda \log W = -\operatorname{rot} \mathbf{f}_1 = \operatorname{div} \mathbf{g}_1 \qquad (65)$$

ce qui correspond aux formules (50) et (51) ou à l'expression (52) de K au moyen des paramètres différentiels de f; puis

$$-h_1 = \mathfrak{M}_1 \log W + \mathfrak{N}_1\varphi \qquad -j_1 = \mathfrak{N}_1 \log W - \mathfrak{M}_1\varphi \text{ [1]}. \qquad (66)$$

Nous avons donc retrouvé la courbure totale K du ds^2 comme invariant du 3e ordre d'une forme semi-normale, et l'application des formules (29) avec les opérateurs différentiels $\frac{d}{ds_d}$ et $\frac{d}{ds_t}$ donne encore, pour I_1 et K, des résultats connus.

14. A côté des formes déjà étudiées ϖ_0 et ϖ_1, on pourrait considérer la forme

$$\varpi_2 = \frac{df}{\Delta f} = x_2 \varpi_2 \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta f}$$

pour laquelle les paramètres différentiels du 1er ordre d'une fonction z sont

$$\mathcal{D}_2 z = \Delta'(f, z) \qquad \mathcal{T}_2 z = \Theta'(f, z)$$

et qui est telle que

$$\varpi_0 \varpi_2 = \varpi_1^2$$

$$\mathcal{D}_0 z \,.\, \mathcal{D}_2 z = \overline{\mathcal{D}_1 z}^2 \qquad \mathcal{T}_0 z \,.\, \mathcal{T}_2 z = \overline{\mathcal{T}_1 z}^2 \qquad \mathcal{L}_0 z \,.\, \mathcal{L}_2 z = \overline{\mathcal{L}_1 z}^2 \quad \text{etc.}$$

Plus généralement on peut associer à toute forme ϖ une forme *inverse* $\bar{\varpi}$ telle que $\varpi\bar{\varpi} = \varpi_1^2$, les paramètres différentiels attachés à ces formes satisfaisant aux dernières des relations précédentes.

Dans le cas d'une forme ϖ quelconque, la théorie générale montre

---

[1] Les invariants I_1, k_1, h_1, j_1 sont les composantes du tenseur $\nabla \mathbf{g}_1 + \mathbf{f}_1^2 - \mathbf{g}_1^2$, de sorte que

$$\nabla \mathbf{g}_1 + \mathbf{f}_1^2 - \mathbf{g}_1^2 = I_1 \frac{\mathbf{td} - \mathbf{dt}}{2} + k_1 \frac{\mathbf{d}^2 + \mathbf{t}^2}{2} + h_1 \frac{\mathbf{d}^2 - \mathbf{t}^2}{2} + j_1 \frac{\mathbf{td} + \mathbf{dt}}{2}.$$

que jusqu'à l'ordre n inclus, on doit *régulièrement*[1] prévoir $n(n-2)$ invariants, dont $2(n-1)$ nouveaux d'ordre n; si un ds^2 est adjoint, le nombre des invariants du système s'élève à $\frac{n(3n-1)}{2}$, dont $3n-2$ nouveaux d'ordre n; par suite les seminvariants sont au nombre de $3n$, dont 3 nouveaux pour chaque ordre. Cette régularité n'est d'ailleurs pas acquise pour les premiers ordres; c'est ainsi que pour l'ordre *un* existe le seul seminvariant $S = \frac{4P}{W^2}$, que nous avons réduit à l'unité pour les formes semi-normales.

VI. Formes de Pfaff adjointes — Opérateurs et invariants — $d\sigma^2$ canonique a une forme.

15. Dans le réseau angulaire attaché à un faisceau simple de courbes, nous avons déjà eu à considérer le faisceau simple des trajectoires orthogonales des courbes de la première famille. Entre les invariants et les opérateurs appartenant à ces deux faisceaux, des rapprochements intéressants sont à faire. Pour simplifier le langage, nous dirons que des formes de Pfaff ϖ et χ sont *orthogonales* si les courbes intégrales des deux équations $\varpi = 0$ et $\chi = 0$ sont deux faisceaux de trajectoires orthogonales; en outre, à toute forme ϖ nous associerons plus particulièrement une des formes orthogonales ϖ_i, que nous dirons *adjointe positive* de ϖ (ϖ étant l'*adjointe négative* de ϖ_i), telle que

$$\left\{\begin{aligned} \varpi &= x\,df = A\,du + B\,dv \\ \varpi_i &= y\,dg = i(-A\,du + B\,dv) = A_i\,du + B_i\,dv \end{aligned}\right. \tag{67}$$

et nous affecterons de l'indice i les expressions relatives à cette forme ϖ_i; on aura les relations

$$P_i = P \qquad Q_i = -Q$$

et comme

$$A = xf_u = iyg_u \qquad B = xf_v = -iyg_v$$

on voit, en posant

$$p = xy \qquad q = \frac{x}{y} \tag{68}$$

[1] Quand il y a k équations de conditions pour exprimer la conservation d'un système par les transformations (3), le nombre des invariants à prévoir jusqu'à l'ordre n inclus est $k\frac{n(n+1)}{2} - 2n$. (Cf. la note du n° 4).