VI. Formes de Pfaff adjointes — Opérateurs et invariants — $d\sigma^2$ CANONIQUE A UNE FORME.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

que jusqu'à l'ordre n inclus, on doit *régulièrement*[1] prévoir $n(n-2)$ invariants, dont $2(n-1)$ nouveaux d'ordre n; si un ds^2 est adjoint, le nombre des invariants du système s'élève à $\frac{n(3n-1)}{2}$, dont $3n-2$ nouveaux d'ordre n; par suite les seminvariants sont au nombre de $3n$, dont 3 nouveaux pour chaque ordre. Cette régularité n'est d'ailleurs pas acquise pour les premiers ordres; c'est ainsi que pour l'ordre *un* existe le seul seminvariant $S = \frac{4P}{W^2}$, que nous avons réduit à l'unité pour les formes semi-normales.

VI. Formes de Pfaff adjointes — Opérateurs et invariants — $d\sigma^2$ canonique a une forme.

15. Dans le réseau angulaire attaché à un faisceau simple de courbes, nous avons déjà eu à considérer le faisceau simple des trajectoires orthogonales des courbes de la première famille. Entre les invariants et les opérateurs appartenant à ces deux faisceaux, des rapprochements intéressants sont à faire. Pour simplifier le langage, nous dirons que des formes de Pfaff ϖ et χ sont *orthogonales* si les courbes intégrales des deux équations $\varpi = 0$ et $\chi = 0$ sont deux faisceaux de trajectoires orthogonales; en outre, à toute forme ϖ nous associerons plus particulièrement une des formes orthogonales ϖ_i, que nous dirons *adjointe positive* de ϖ (ϖ étant l'*adjointe négative* de ϖ_i), telle que

$$\left\{\begin{aligned} \varpi &= x\,df = A\,du + B\,dv \\ \varpi_i &= y\,dg = i(-A\,du + B\,dv) = A_i\,du + B_i\,dv \end{aligned}\right. \tag{67}$$

et nous affecterons de l'indice i les expressions relatives à cette forme ϖ_i; on aura les relations

$$P_i = P \qquad Q_i = -Q$$

et comme

$$A = xf_u = iyg_u \qquad B = xf_v = -iyg_v$$

on voit, en posant

$$p = xy \qquad q = \frac{x}{y} \tag{68}$$

[1] Quand il y a k équations de conditions pour exprimer la conservation d'un système par les transformations (3), le nombre des invariants à prévoir jusqu'à l'ordre n inclus est $k\frac{n(n+1)}{2} - 2n$. (Cf. la note du n° 4).

que les fonctions f, g, q satisfont aux relations établies aux n°s 2 et 3 par les formules (11), (11′), (12) et (13). On a aussi

$$\left\{\begin{array}{l} 2\mathrm{A}du = x\,df + iy\,dg = \varpi + i\varpi_i \\ 2\mathrm{B}dv = x\,df - iy\,dg = \varpi - i\varpi_i \end{array}\right. \tag{69}$$

ce qui établit une symétrie intéressante entre les variables u, v et f, g et entre les formes $\mathrm{A}du$, $\mathrm{B}dv$ et ϖ, ϖ_i.

16. Les formules

$$\vartheta_{ui} = i\vartheta_u \qquad \vartheta_{vi} = -i\vartheta_v$$

donnent aussitôt pour les opérateurs du 1er ordre et les invariants du 2e ordre

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{T} \qquad \mathcal{T}_i = -\mathcal{D} \tag{70}$$

$$\mathrm{D}_i = \mathrm{T} \qquad \mathrm{T}_i = -\mathrm{D}\,. \tag{71}$$

On a ensuite, pour les opérateurs du 2e ordre et la parenthèse du 1er ordre.

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{L}_i = \mathcal{L} & \mathcal{M}_i = -\mathcal{M} & \mathcal{N}_i = -\mathcal{N} \\ & (\mathcal{D}_i\mathcal{T}_i) = (\mathcal{D}\mathcal{T}) & \end{array}\right. \tag{72}$$

puis pour les invariants du 3e ordre

$$\mathrm{I}_i = \mathrm{I} \qquad k_i = k \qquad h_i = -h \qquad j_i = -j\,. \tag{73}$$

Les relations intimes qui se poursuivent entre les opérateurs et les invariants de formes adjointes ϖ et ϖ_i — et se généraliseraient pour des formes $\varpi_\theta = \cos\theta\,.\,\varpi + \sin\theta\,.\,\varpi_i$ — ont leur origine dans les expressions vectorielles, invariantes ou comitantes, du réseau angulaire attaché à ces formes. Cela était déjà apparent pour les formes semi-normales, et nous reviendrons sur le point de vue vectoriel. Mais nous remarquerons d'abord qu'à toute forme ϖ est attachée une forme quadratique comitante $d\sigma^2$, que nous dirons *canonique* pour ϖ, et liée à cette forme ϖ comme le ds^2 l'est à une forme semi-normale; en posant en effet

$$d\sigma^2 = 4\mathrm{P}\,du\,dv = \varpi^2 + \varpi_i^2 \tag{74}$$

et considérant $d\sigma^2$ comme un ds^2 donné, le seminvariant S d'ordre un de ϖ par rapport à ce ds^2 est réduit à l'unité; entre autres conséquences, l'invariant du 3e ordre k de ϖ est la courbure totale de la forme $d\sigma^2$. Si une forme ϖ est d'abord considérée en liaison avec

un ds^2 donné, on pourra, par des transformations conformes appropriées, conserver cette forme et ramener le ds^2 à la forme $d\sigma^2$, pour laquelle ϖ est canonique. Les expressions vectorielles interprétées pour une forme semi-normale, par rapport au ds^2, donneront donc lieu à une interprétation analogue pour une forme quelconque, par rapport au $d\sigma^2$ canonique.

17. Reprenons le cas d'un ds^2 donné, c'est-à-dire d'un étalon de longueur invariant fixé en tout point $\mathbf{m}$ d'une surface. Soient

$$\varpi = \mathbf{a} \times d\mathbf{m} \qquad ds^2 = (d\mathbf{m})^{\overset{2}{\times}} \tag{75}$$

la forme ϖ et le ds^2 donnés, et la forme adjointe

$$\varpi_i = \mathbf{b} \times d\mathbf{m} \qquad \mathbf{b} = \mathrm{J}\mathbf{a} \ . \tag{76}$$

En se reportant aux formes (67), ou encore

$$\mathbf{a} = x\nabla f \qquad \mathbf{b} = x\nabla g \tag{67'}$$

et aux formules (32) et (39), les opérateurs de ϖ et ϖ_i fourniront les paramètres différentiels d'une fonction z, que nous écrirons, avec les vecteurs *inverses* de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^{\overset{2}{\times}}} \qquad \bar{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}^{\overset{2}{\times}}} \tag{77}$$

sous les formes

$$\mathcal{D}z = \frac{\mathbf{a} \times \nabla z}{\mathbf{a}^{\overset{2}{\times}}} = \bar{\mathbf{a}} \times \nabla z \qquad \mathcal{C}z = \frac{\mathbf{b} \times \nabla z}{\mathbf{b}^{\overset{2}{\times}}} = \bar{\mathbf{b}} \times \nabla z \ . \tag{78}$$

Par l'effet de la parenthèse

$$(\mathcal{D}\mathcal{C})z = \bar{\mathbf{a}} \times \nabla(\bar{\mathbf{b}} \times \nabla z) - \bar{\mathbf{b}} \times \nabla(\bar{\mathbf{a}} \times \nabla z) \ .$$

$$= (\nabla\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} - \nabla\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}) \times \nabla z$$

le vecteur comitant

$$-\mathbf{f} = \nabla\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} - \nabla\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} \tag{79}$$

et la forme de Pfaff correspondante $-\mathbf{f} \times d\mathbf{m}$ sont mis en évidence.

18. Pour une forme semi-normale ϖ_1 et les vecteurs

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{d} = \frac{\nabla f}{\sqrt{\Delta f}} \qquad \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{t} = \mathrm{J}\mathbf{d}$$

$$-\mathbf{f}_1 = \nabla\mathbf{t} \times \mathbf{d} - \nabla\mathbf{d} \times \mathbf{t} \tag{79'}$$

$\mathbf{f}_1$ est le vecteur de la formule (61) et l'on a aussi

$$\mathcal{D}_1 f = \sqrt{\Delta f} \qquad \mathcal{T}_1 f = 0$$

$$\mathcal{D}_1 g = -\mathcal{T}_{1i} g = 0 \qquad \mathcal{T}_1 g = \mathcal{D}_{1i} g = \sqrt{\Delta g}$$

$$-\mathbf{f}_1 \times \nabla f = (\mathcal{D}_1 \mathcal{T}_1) f = \mathrm{T}_1 \sqrt{\Delta f} \qquad \mathrm{T}_1 = -\mathbf{f}_1 \times \mathbf{d} = -\mathbf{g}_1 \times \mathbf{t}$$

$$-\mathbf{f}_1 \times \nabla g = (\mathcal{D}_1 \mathcal{T}_1) g = -\mathrm{D}_1 \sqrt{\Delta g} \qquad \mathrm{D}_1 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{t} = -\mathbf{g}_1 \times \mathbf{d}$$

comme cela a été établi; par suite, puisque

$$\mathbf{d} \times \nabla \mathbf{d} = \mathbf{t} \times \nabla \mathbf{t} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla \mathbf{d} = \mathbf{t}\mathbf{f}_1 & \nabla \mathbf{t} = -\mathbf{d}\mathbf{f}_1 & \\ \mathrm{D}_1 = \operatorname{div} \mathbf{d} & \mathrm{T}_1 = \operatorname{div} \mathbf{t} & -\mathbf{g}_1 = (\operatorname{div} \mathbf{d})\mathbf{d} + (\operatorname{div} \mathbf{t})\mathbf{t} \,. \end{array} \right. \tag{80}$$

Les formules (78) montrent bien que les opérateurs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ sont indépendants du ds^2, utilisé seulement comme intermédiaire, et les formules (80) donneront, pour une forme ϖ, des expressions analogues à celles obtenues pour une forme semi-normale si au ds^2 est substitué le $d\sigma^2$ canonique à cette forme, et si les opérations (multiplication intérieure, gradient, divergence, etc.) sont effectuées vis-à-vis de ce $d\sigma^2$. On peut alors, aux symboles $\frac{d}{ds_d}$, $\frac{d}{ds_t}$ utilisés aux n°s 11 et suivants, substituer des symboles $\frac{d}{d\sigma_a}$, $\frac{d}{d\sigma_b}$, bien qu'ils n'aient pas une signification absolue comme les précédents, la forme $d\sigma^2$ étant attachée à la forme ϖ.

On obtient une autre notation convenable pour les opérateurs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ en portant des formes différentielles exactes df et dg; d'après les formules (32) du n° 6 et (39) du n° 9, en tenant compte de

$$\nabla z = z_f \nabla f + z_g \nabla g \qquad \nabla g = \frac{x}{y} \mathrm{J} \nabla f$$

il vient

$$\mathcal{D}_0 z = z_f$$

$$\mathcal{T}_0 z = \frac{x}{y} z_g \qquad \text{ou} \qquad (\mathcal{D}_i)_0 z = z_g$$

et par suite

$$\mathcal{D} z = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial f} \qquad \mathcal{T} z = \mathcal{D}_i z = \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial g} \tag{81}$$

d'où la notation symbolique

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\varpi} \qquad \mathcal{E} = \mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\varpi_i} \tag{82}$$

les ∂ rappelant l'accouplement des formes de Pfaff ϖ et ϖ_i.

Une notation voisine est atteinte en partant de la relation identique entre trois formes de Pfaff à deux variables (analogue à celle entre trois vecteurs du plan), et choisissent pour une de ces formes une différentielle exacte dz

$$[\varpi\chi]\,dz = -[\chi\,dz]\varpi + [\varpi\,dz]\chi \tag{83}$$

$$dz = \frac{[\chi\,dz]}{[\chi\varpi]}\varpi + \frac{[\varpi\,dz]}{[\varpi\chi]}\chi$$

puis convenant de l'écriture symbolique

$$dz = \left[\frac{dz}{\varpi}\right]\varpi + \left[\frac{dz}{\chi}\right]\chi \tag{84}$$

de sorte qu'une réduction au dénominateur commun $[\varpi\chi]$, effectuée suivant les règles de la multiplication extérieure, rétablisse la signification de l'expression; la notation $\left[\frac{dz}{\varpi}\right]$ a l'avantage d'une analogie avec celle du quotient entier. Dans le cas particulier $\chi = \varpi_i$, on trouve ainsi

$$\mathcal{D}z = \left[\frac{dz}{\varpi}\right] \qquad \mathcal{E}z = \mathcal{D}_i z = \left[\frac{dz}{\varpi_i}\right] \tag{85}$$

notation voisine de (82).

19. Nous allons étendre l'analogie, déjà signalée à la fin du n° 15, entre les variables u, v et f, g, entre les formes $A\,du$, $B\,dv$ et ϖ, ϖ_i, commencée par les formules (67) et (69) entre autres. Nous rapprochons pour cela les formules (19) et (81)

$$\mathcal{D}z = \frac{z_f}{x} \qquad \mathcal{E}z = \frac{z_g}{y} \tag{81}$$

$$\vartheta_u z = \frac{z_u}{A} \qquad \vartheta_v z = \frac{z_v}{B} \tag{19}$$

puis les invariants du 1er ordre obtenus par l'emploi de ces paramètres différentiels; en appliquant en effet les formules (33) à partir de $\varpi_0 = df$ et $(\varpi_i)_0 = dg$, on obtient

$$D = -T_i = -\mathcal{E}_i \log y = \mathcal{D} \log y \qquad T = \mathcal{E} \log x \tag{86}$$

$$\alpha = \vartheta_u \log B \qquad \beta = \vartheta_v \log A \tag{20}$$

et on complète les formules déjà obtenues par

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D} &= \frac{1}{2}(\mathcal{D}\log \mathrm{P} + i\mathcal{T}\log \mathrm{Q}) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}\log p - \mathcal{D}\log q) \\ \mathrm{T} &= \frac{1}{2}(\mathcal{T}\log \mathrm{P} - i\mathcal{D}\log \mathrm{Q}) = \frac{1}{2}(\mathcal{T}\log p + \mathcal{T}\log q) \end{aligned}\right. \tag{87}$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(\vartheta_u \log p - \vartheta_v \log q) = \frac{1}{2}(\vartheta_u \log \mathrm{P} - \vartheta_u \log \mathrm{Q}) \\ \beta &= \frac{1}{2}(\vartheta_v \log p - \vartheta_u \log q) = \frac{1}{2}(\vartheta_v \log \mathrm{P} + \vartheta_v \log \mathrm{Q}) \ . \end{aligned}\right. \tag{88}$$

Les relations entre opérateurs du 2e ordre et parenthèses ont été données par les formules (24′) et (25), mais en remarquant l'analogie des formes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vartheta_u\vartheta_v + \vartheta_v\vartheta_u + \beta\vartheta_u + \alpha\vartheta_v)$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}\mathcal{T} + \mathcal{T}\mathcal{D} + \mathrm{T}\mathcal{D} + \mathrm{D}\mathcal{T}$$

on voit en particulier qu'à

$$\mathcal{L}z = \vartheta_{uv}z = \frac{z_{uv}}{\mathrm{P}}$$

correspond

$$\mathcal{M}z = \frac{2z_{fg}}{p} \ . \tag{89}$$

Pour les invariants du 3e ordre, on complète les formules (30) par

$$\left\{\begin{aligned} -\mathrm{I} &= -\frac{i}{2}\mathcal{L}\log \mathrm{Q} = \frac{1}{2}\mathcal{M}\log q \\ -k &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\log \mathrm{P} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\log p - \mathcal{M}\log q) \\ -h &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}\log \mathrm{P} + i\mathcal{M}\log \mathrm{Q}) = \frac{1}{2}(\mathcal{M}\log p - \mathcal{L}\log q) \\ -j &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}\log \mathrm{P} - i\mathcal{M}\log \mathrm{Q}) = \frac{1}{2}\mathcal{M}\log p \ . \end{aligned}\right. \tag{90}$$

20. Revenons encore sur certaines expressions vectorielles intéressantes; les trajectoires orthogonales $g =$ const. des courbes $f =$ const. correspondant à la relation

$$\nabla g = q\mathrm{J}\nabla f \tag{11′}$$

on en déduit, comme nous l'avons vu

$$\Lambda f = -\nabla f \times \nabla \log q \qquad \Lambda g = \nabla g \times \nabla \log q \tag{12'}$$

d'où le vecteur

$$\nabla \log q = -\Omega f . \nabla f + \Omega g . \nabla g \tag{91}$$

et en prenant les rotationnels (condition d'intégrabilité), on obtient

$$[\nabla f . \nabla \Omega f] = [\nabla g . \nabla \Omega g] \tag{92}$$

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Theta'(g, \Omega g) \; ; \qquad (64)\ (92')$$

on vérifie encore que le seminvariant I_1 n'est pas altéré si on substitue à f, par exemple, une fonction quelconque $F(f)$ de cette variable [1].

Mais, à partir des formules (80), on obtient aussi

$$\Lambda \mathbf{d} = I_1 \mathbf{t} - (D_1^2 + T_1^2)\mathbf{d} \qquad \Lambda \mathbf{t} = -I_1 \mathbf{d} - (D_1^2 + T_1^2)\mathbf{t} \tag{93}$$

$$I_1 = \mathbf{t} \times \Lambda \mathbf{d} = -\mathbf{d} \times \Lambda \mathbf{t} = [\mathbf{d} . \Lambda \mathbf{d}] = [\mathbf{t} . \Lambda \mathbf{t}] \tag{94}$$

autre expression de ce seminvariant fondamental.

Nous allons montrer la relation entre les formes $[\nabla f . \nabla \Omega f]$ et $[\mathbf{d} . \Lambda \mathbf{d}]$ en supposant la forme $\varpi_0 = df$ réalisée *sur un* ds^2 *égal à son* $d\sigma_0^2$ *canonique;* on a alors

$$\mathbf{d} = \nabla f \qquad \Delta f = 1 \qquad \varpi_0 = \varpi_1$$

$$\nabla \mathbf{d} = \mathbf{t}\mathbf{f}_1 = \nabla^2 f \qquad [\mathbf{t}\mathbf{f}_1] = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{d} = \mathbf{t} \times \mathbf{f}_1 = \Lambda f = \Omega f$$

donc

$$\mathbf{f}_1 = \Omega f . \mathbf{t} \qquad \nabla \mathbf{d} = \Omega f . \mathbf{t}^2$$

$$\nabla^2 \mathbf{d} = \mathbf{t}^2 \nabla \Omega f - \overline{\Omega f}^2 (\mathbf{d}\mathbf{t} + \mathbf{t}\mathbf{d})\mathbf{t}$$

$$\Lambda \mathbf{d} = (\mathbf{t} \times \nabla \Omega f)\mathbf{t} - \overline{\Omega f}^2 \mathbf{d} = \nabla \Omega f - (\mathbf{d} \times \nabla \Omega f + \overline{\Omega f}^2)\mathbf{d}$$

le coefficient de $\mathbf{d}$ dans la dernière expression étant la courbure totale du ds^2, d'où enfin

$$[\mathbf{d} . \Lambda \mathbf{d}] = \mathbf{t} \times \nabla \Omega f = [\nabla f . \nabla \Omega f] \; .$$

---

[1] Nous rappelons les relations

$$\nabla F = F' \nabla f \qquad \Delta F = F'^2 \Delta f \qquad \nabla^2 F = F'' \overline{\nabla f}^2 + F' \nabla^2 f \qquad \Lambda F = F'' \Delta f + F' \Delta f$$

$$\Omega F = \frac{F''}{F'^2} + \frac{1}{F'} \Omega f \qquad \nabla \Omega F = \left\{ -\left(\frac{1}{F'}\right)'' + \left(\frac{1}{F'}\right)' \Omega f \right\} \nabla f + \frac{1}{F'} \nabla \Omega f$$

les accents indiquant les dérivées par rapport à f.

C'est là l'invariant I_0 de ϖ_0; c'est aussi le seminvariant I_1 pour $ds^2 = d\sigma_0^2$, mais pour un autre ds^2, soit ds'^2, pour lequel les symboles seraient accentués, on aurait

$$I_0 = \frac{[\nabla' f . \nabla' \Omega f]}{\Delta' f} = \frac{I_1'}{\Delta' f}$$

21. Résumons, en modifiant un peu leur forme, certains des résultats précédemment obtenus; si l'on part d'une forme de Pfaff quelconque ϖ, on peut lui associer, au moyen d'un facteur intégrant ν_0, la forme intégrable

$$\varpi_0 = \nu_0 \varpi = df$$

à laquelle est associée le $d\sigma_0^2$ canonique

$$d\sigma_0^2 = 4 f_u f_v \, du \, dv = \varpi_0^2 + (\varpi_i)_0^2 = df^2 + \frac{1}{q^2} dg^2$$

avec

$$g_u = -iqf_u \qquad g_v = iqf_v \, .$$

Sur ce $d\sigma_0^2$, les intégrales $f =$ const. sont des courbes parallèles et l'on a, pour les premiers invariants de ϖ_0

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 &= \Omega f = -\mathcal{D}_0 \log q = q \frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{1}{q}\right) \\ -k_0 &= \mathcal{D}_0 D_0 + D_0^2 = q^2 \frac{\partial^2}{\partial f^2}\left(\frac{1}{q}\right) \\ -I_0 &= -\mathcal{C}_0 D_0 = q \frac{\partial^2 \log q}{\partial f \, \partial g} \end{aligned} \right. \tag{95}$$

en accord avec les formules (87) et (90), où $p = \frac{1}{q}$. Différentes conséquences, d'ailleurs connues, peuvent en être déduites, suivant la nature de la fonction q de f, g.

Dans le cas où, à côté de la forme ϖ, est donné un ds^2, on peut associer à ϖ, au moyen d'un facteur semi-normant ν_1, la forme semi-normale

$$\varpi_1 = \nu_1 \varpi \qquad \nu_1 = \frac{W}{2\sqrt{P}}$$

pour laquelle le $d\sigma_1^2$ canonique se confond avec le ds^2

$$d\sigma_1^2 = ds^2 = \varpi_1^2 + \varpi_{1i}^2 \, .$$

Comme nous l'avons établi, les invariants de la forme ϖ_1 sont les invariants euclidiens (géodésiques) de l'équation $\varpi = 0$. Avec les notations

$$\frac{f_u}{f_v} = Q = e^{-2i\varphi} \qquad \frac{W}{2} = e^{w} \tag{49'}$$

on peut écrire une forme semi-normale

$$\varpi_1 = \frac{W}{2}\left(\sqrt{\frac{f_u}{f_v}}\,du + \sqrt{\frac{f_v}{f_u}}\,dv\right) = e^{w-i\varphi}\,du + e^{w+i\varphi}\,dv\ . \tag{96}$$

VII. Faisceaux isothermes.

22. Il est bien connu, dans la représentation conforme des surfaces, qu'à côté des deux faisceaux formés par les deux séries de lignes minima, $du = 0$ et $dv = 0$, les faisceaux isothermes de courbes sont aussi conservés; l'équation différentielle $\varpi = 0$ d'un tel faisceau du premier ordre est en effet caractérisée par la condition invariante

$$I = 0$$

et l'équation $\varpi = 0$ n'a alors aucun invariant conforme. Nous avons donné bien des formes à l'invariant I de ϖ; considérons en particulier une forme semi-normale ϖ_1 sur un ds^2 et rappelons diverses interprétations de l'équation $I_1 = 0$. D'après

$$I_1 = \frac{i}{2}\Lambda \log Q = 0 \tag{97}$$

$$\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u\,\partial v} = 0 \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{a(u)}{b(v)}$$

le rapport $\frac{A}{B}$ des coefficients de l'équation $\varpi = 0$ est le quotient de deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v; le facteur intégrant $\frac{a}{2A} = \frac{b}{2B}$ ramène alors à l'équation intégrable

$$\varpi_0 = \frac{1}{2}\left\{a(u)\,du + b(v)\,dv\right\} = 0$$

et les courbes intégrales sont données par

$$f = \frac{1}{2}\left\{U(u)\,du + V(v)\,dv\right\} = \text{const.} \qquad U' = a\ , \quad V' = b\ ,$$