Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION A LA REPRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

Autor: Delens, P. C.

Kapitel: VII. Faisceaux isothermes.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23887

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comme nous l'avons établi, les invariants de la forme ϖ_1 sont les invariants euclidiens (géodésiques) de l'équation $\varpi = 0$. Avec les notations

$$\frac{f_u}{f_v} = Q = e^{-2i\varphi} \qquad \frac{W}{2} = e^{w} \tag{49'}$$

on peut écrire une forme semi-normale

$$\varpi_1 = \frac{W}{2}\left(\sqrt{\frac{f_u}{f_v}}\,du + \sqrt{\frac{f_v}{f_u}}\,dv\right) = e^{w-i\varphi}\,du + e^{w+i\varphi}\,dv\ . \tag{96}$$

VII. Faisceaux isothermes.

22. Il est bien connu, dans la représentation conforme des surfaces, qu'à côté des deux faisceaux formés par les deux séries de lignes minima, $du = 0$ et $dv = 0$, les faisceaux isothermes de courbes sont aussi conservés; l'équation différentielle $\varpi = 0$ d'un tel faisceau du premier ordre est en effet caractérisée par la condition invariante

$$I = 0$$

et l'équation $\varpi = 0$ n'a alors aucun invariant conforme. Nous avons donné bien des formes à l'invariant I de ϖ; considérons en particulier une forme semi-normale ϖ_1 sur un ds^2 et rappelons diverses interprétations de l'équation $I_1 = 0$. D'après

$$I_1 = \frac{i}{2}\Lambda \log Q = 0 \tag{97}$$

$$\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u\,\partial v} = 0 \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{a(u)}{b(v)}$$

le rapport $\frac{A}{B}$ des coefficients de l'équation $\varpi = 0$ est le quotient de deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v; le facteur intégrant $\frac{a}{2A} = \frac{b}{2B}$ ramène alors à l'équation intégrable

$$\varpi_0 = \frac{1}{2}\left\{a(u)\,du + b(v)\,dv\right\} = 0$$

et les courbes intégrales sont données par

$$f = \frac{1}{2}\left\{U(u)\,du + V(v)\,dv\right\} = \text{const.} \qquad U' = a\ , \quad V' = b\ ,$$

les accents indiquant, pour les fonctions d'une seule variable, les dérivées par rapport à celle-ci; une transformation (3) donne alors à f une forme réduite $\overline{X} = \frac{1}{2}(\overline{u} + \overline{v})$. L'on a en même temps

$$I_1 = \Lambda\varphi = 0 \tag{97'}$$

$$\varphi = \frac{i}{2}\log Q = -\frac{i}{2}\left(\log\frac{1}{a} - \log\frac{1}{b}\right) = -\frac{i}{2}\left\{\Phi(u) - \Psi(v)\right\}$$

donc la condition (97') exprime aussi que les courbes $\varphi = \text{const.}$ forment un faisceau isotherme, φ *étant variable isothermique*, et cette propriété est caractéristique; nous nous étions d'ailleurs ramené à des fonctions f pour lesquelles Λf ou Ωf est nul: c'est ce qu'exprime, à un changement de fonction f près, la forme suivante de l'équation invariante

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = 0 \qquad \Omega f = F(f) \tag{98}$$

où F est une fonction arbitraire, qu'on peut choisir pour avoir $\Omega F = 0$. En revenant alors à la notation f pour la fonction choisie, et choisissant de même la fonction g pour que $\Omega g = 0$ puisqu'on a aussi

$$I_1 = \Theta'(g, \Omega g) = 0$$

il en résulte, d'après (91), $\nabla \log q = 0$, et l'on peut par suite prendre

$$q = 1 \qquad x = y \qquad p = x^2$$

$$ds^2 = W^2(dX^2 + dY^2) = x^2(df^2 + dg^2)\ .$$

On a encore

$$D_1 = \mathcal{D}_1 \log x \qquad T_1 = \mathcal{T}_1 \log x$$

$$\mathbf{g}_1 = -\nabla \log W + J\nabla\varphi = -\nabla \log x$$

toutes formules qui sont bien d'accord avec

$$I_1 = \operatorname{rot}\mathbf{g}_1 = -(\mathcal{D}_1\mathcal{T}_1)\log x = 0$$

et les formes particulières que prennent alors les formules déjà établies.

23. En résumé, ce qui caractérise un faisceau isotherme, c'est d'être associé à un faisceau également isotherme de trajectoires orthogonales, et plus généralement d'être incorporé dans un réseau angulaire isotherme, toutes les courbes d'un tel réseau pouvant être représentées par des intégrales $f = \text{const.}$, $g = \text{const.}$, etc. pourvues en un même point **m** de vecteurs gradients de même module $\frac{1}{x}$; ces gradients forment en tout point de la surface une *simili-étoile*, se ramenant

à celle attachée à un autre réseau angulaire isotherme X = const., Y = const., etc. par une similitude dont l'angle et le rapport sont liés par la relation

$$\nabla \log \frac{W}{x} = J \nabla \varphi$$

de sorte que φ et $\log \frac{W}{x}$ sont deux solutions conjuguées de l'équation $\Delta z = o$. C'est par le choix de ces solutions que se différencient les divers réseaux angulaires isothermes constituant l'ensemble des faisceaux isothermes de la surface — brièvement *l'ensemble isotherme.*

Si l'on suppose aussi qu'on effectue, en chaque point **m**, un changement de l'étalon de longueur, de sorte que la simili-étoile de repère du réseau isotherme considéré devienne une *étoile* de vecteurs unitaires, ceci revient à une représentation sur le $d\sigma_0^2$ canonique de ϖ_0

$$d\sigma_0^2 = df^2 + dg^2 = dU\, dV$$

et, selon qu'on opérera sur un étalon de longueur ou l'autre, on considérera les repères et simili-repères attachés à ds^2 et $d\sigma_0^2$ comme de modules 1 et $\frac{1}{x}$, ou x et 1.

VIII. Faisceaux non isothermes.

24. Soit l'équation $\varpi = o$ d'un faisceau non isotherme; par le moyen d'un facteur normant $\nu^* = \sqrt{I}$, on donnera au premier membre de l'équation la forme *normale*

$$\varpi^* = \sqrt{I}\, \varpi \tag{99}$$

dont les invariants seront ceux de l'équation $\varpi = o$; en particulier, si on part des formes $\varpi_0 = df$, ou ϖ_1, on aura

$$\varpi^* = \sqrt{\frac{\Theta'(f, \Omega f)}{\Delta f}}\, df = \sqrt{\Theta'(f, \Omega f)}\, \varpi_1 .$$

Il résulte de la première formule (36) que la forme normale ϖ^* est caractérisée par son invariant I^* ramené à l'unité

$$I^* = 1$$

cependant qu'en général les ordres des opérateurs et des invariants (dont les symboles portent des astérisques) sont majorés de deux unités par rapport à ceux qui leur correspondent pour une forme ϖ