Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1931)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINS VOLUMES ALGÉBRIQUES
Autor: Papillon, Pierre
Kapitel: 2. — Volumes a parois coniques.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23889

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2. — Volumes a parois coniques.

§ 8. — *Expression générale.* — Substituons au cylindre un cône et calculons ΣV_i.

Soient M_i, m les points de Σ_i et de σ sur une même droite issue du sommet du cône,

$$\rho_i = \frac{\overline{OM_i}}{\overline{Om}},$$

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s).

Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle ayant pour sommet celui du cône; il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma V_i = \displaystyle\int\int_\sigma \frac{1}{3}(\Sigma \rho_i^3)(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma \\ \text{avec} \\ F(\rho_i x, \rho_i y, \rho_i z) = 0 . \end{array}\right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs F par rapport aux puissances décroissantes de XYZ,

$$F \equiv \Phi_m(X, Y, Z) + \Phi_{m-1}(X, Y, Z) + \Phi_{m-2}(X, Y, Z) + \ldots + \Phi_0 ,$$

il vient

$$\boxed{\Sigma V_i = \frac{1}{3}\int\int_\sigma \left(-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3\frac{\Phi_{m-1}\Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3\frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m}\right)(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma} \tag{4}$$

§ 9. — Tout d'abord, la parenthèse

$$-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \ldots - 3 \ldots ,$$

étant homogène et d'ordre — 3, peut être égalée à la somme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} ;$$

dès lors, c désignant le contour de σ,

$$\Sigma V_i = \int_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix} .$$

D'autre part, toute modification laissant invariante la même parenthèse n'altère point ΣV_i, et ceci permet un grand nombre d'associations entre surfaces (S); en particulier, si

$$\Phi_{m-1}^3 - 3\Phi_m \Phi_{m-1} \Phi_{m-2} + 3\Phi_m^2 \Phi_{m-3} = 0 ,$$

les sommes précédentes sont nulles.

Nous n'aborderons pas le développement de ces questions; M. A. Buhl a défriché ce terrain dans les quatrième et cinquième Mémoires précités [1].

§ 10. — Lorsque σ appartient à la surface (s_0) d'équation

$$\frac{1}{m}\left(-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3\frac{\Phi_{m-1}\Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3\frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m}\right) = 1 ,$$

ou

$$m\Phi_m^3 + 3\Phi_m^2 \Phi_{m-3} - 3\Phi_m \Phi_{m-1} \Phi_{m-2} + \Phi_{m-1}^3 = 0 ,$$

il vient

$$\Sigma V_i = m \int_\sigma \int \frac{1}{3}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma ;$$

les volumes V_i ont donc pour moyenne arithmétique le volume conique de même nature que limite la cloison σ; cette surface (s_0) est généralement de degré $3m$.

§ 11. — *Volume cylindro-conique.* — Prenons pour (S) un cylindre circulaire dont nous pouvons toujours prendre l'équation sous la forme

$$F \equiv (X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

[1] Pages 317-327; 195-204. Voir aussi *Géom. et Analyse Int. doubles*, pp. 8 et 30.

En cette hypothèse

$$\Phi_m \equiv x^2 + y^2 ,$$
$$\Phi_{m-1} \equiv -2ax ,$$
$$\Phi_{m-2} \equiv a^2 - R^2 ,$$
$$\Phi_{m-3} \equiv 0 ;$$

(s_0) a donc pour équation

$$2(x^2 + y^2)^3 + 6(x^2 + y^2)ax(a^2 - R^2) - 8a^3x^3 = 0 ,$$

soit finalement [1]

$$(x^2 + y^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)y^2] = 0 .$$

C'est un cylindre dont la base, sextique tricirculaire, possède au sommet du cône un point triple.

1° $a > R$ (sommet du cône intérieur au cylindre).

Les trois branches passant à l'origine sont réelles, les tangentes en ce point ayant pour coefficients angulaires respectifs

$$\infty , \qquad \pm\sqrt{\frac{a^2 + 3R^2}{3(a^2 - R^2)}} .$$

La courbe rencontre $x'x$ au point d'abscisse

$$\sqrt[3]{a(a^2 + 3R^2)} ;$$

ce point est du reste intérieur à la circonférence directrice

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0 .$$

---

[1] En coordonnées polaires

$$\rho^3 = a[3R^2 \cos\theta + a^2 \cos 3\theta] .$$

Les valeurs maximum et minimum de ρ sont acquises pour

$$\theta = 0$$

et, pour

$$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3a^2 + R^2}}{2a} \qquad \text{et alors} \qquad \rho = -\sqrt{a^2 - R^2} ,$$

avec

$$a > R .$$

Enfin, sextique et circonférence se coupent aux points de coordonnées (fig. 1)

$$\left(a - \frac{R^2}{a}, \quad \pm \frac{R}{a}\sqrt{a^2 - R^2}\right).$$

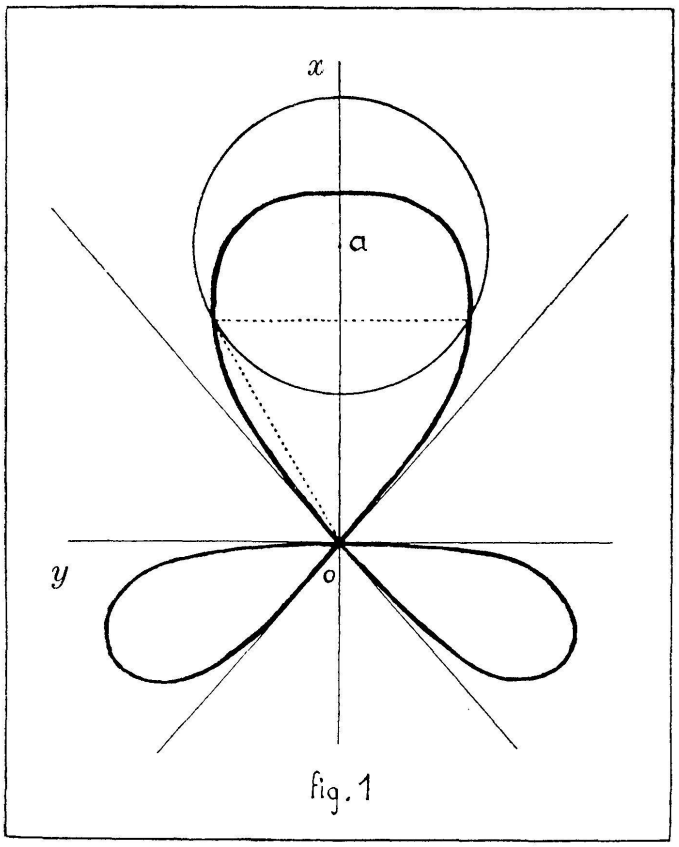

fig. 1

2. $a < R$ (sommet du cône intérieur au cylindre).

La branche tangente en 0 à l'axe $y'y$ est seule réelle; la sextique est intérieure à la circonférence (fig. 2).

§ 12. — *Volume sphéro-conique.* — Prenons pour (S) la sphère d'équation

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 \ ;$$

l'équation de (s_0) s'obtient en substituant $y^2 + z^2$ à y^2 dans les calculs du paragraphe précédent; soit.

$$(x^2 + r^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)r^2] = 0$$

avec

$$r^2 = y^2 + z^2 \ .$$

Ainsi (s_0) n'est autre que la surface de révolution d'axe $x'Ox$ ayant pour méridienne la sextique déjà étudiée.

§ 13. — Si, en résumé, nous associons à la circonférence

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

la sextique

$$(x^2 + y^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)y^2] = 0 ,$$

un cône de sommet O découpe:

1° Sur les cylindres droits admettant ces courbes pour directrices,

2° Sur les surfaces d'axe Ox admettant ces courbes pour méridiennes

des cloisons Σ_1 et Σ_2 d'une part, une cloison σ d'autre part, telles que le dernier volume conique soit la moyenne des deux premiers.

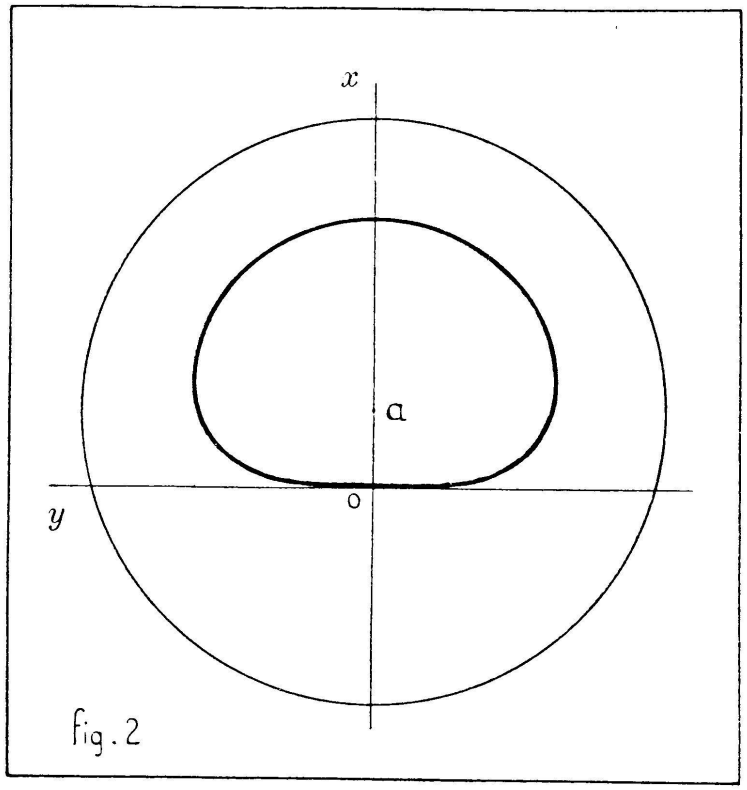

fig. 2

§ 14. — Pour les surfaces (S) de révolution

$$az^2 + br^2 - 1 = 0 ,$$
$$(z^2 + r^2)^2 - (a^2z^2 \pm b^2r^2) = 0 ,$$
$$(z^2 + r^2 - 2ar)^2 - b^2(z^2 + r^2) = 0 ,$$

à méridienne conique, ovale de Cassini, limaçon de Pascal, les surfaces (s_0) sont les mêmes:

$$(z^2 + r^2)^3 - z(Az^2 + Br^2) = 0 .$$

De là une association possible de méridiennes fort différentes; nous n'insisterons pas sur la détermination de ces méridiennes associées.

3. — Volumes a parois conoïdales.

§ 15. — *Expression générale.* — Substituons enfin au cylindre un conoïde droit et calculons ΣV_i.

Soient, l'axe conoïdal étant confondu avec $z'z$, μ, M_i, m les points de $z'z$, de Σ_i et de σ sur une même parallèle au plan xOy

$$\rho_i = \frac{\overline{\mu M_i}}{\overline{\mu m}},$$

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s).

Il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma V_i = \displaystyle\int_\sigma\int \frac{1}{2}(\Sigma \rho_i^2)(\alpha x + \beta y)\, d\sigma\ , \\ \text{avec} \\ F(\rho_i x\ ,\ \rho_i y\ ,\ z) = 0\ . \end{array}\right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs F par rapport aux puissances décroissantes de XY,

$$F \equiv \Lambda_q(X\ ,\ Y\ ,\ Z) + \Lambda_{q-1} + \ldots$$

Λ_i étant homogène et de degré i en XY, il vient

$$\boxed{\Sigma V_i = \frac{1}{2}\int_\sigma\int \left(\frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2\frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q}\right)(\alpha x + \beta y)\, d\sigma} \qquad (5)$$

§ 16. — Posons

$$\Lambda = \frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2\frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q}\ ;$$