SUR LES FAMILLES CROISSANTES DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE DÉNOMBRABLE

Autor(en): **Sierpiski, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23891

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

(III). H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. *Math. Annalen*, 95 (1925).

(IV). P. Koebe, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen (1. Mitteilung). *Sitzungsber. Akad. d. Wissensch. Berlin*, 1927.

(V). Cf.: W. Blaschke, *Differentialgeometrie*, I (Berlin, 1921), § 84.

(VI). Cf.: Blaschke, *l. c.*, § 64.

(VII). W. Rinow, Ueber Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Grossen und im Kleinen; Dissertation Berlin 1931, *Math. Zeitschrift* (sous presse).

(VIII). H. Hopf, Die Curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen. *Nachr. d. Gesellsch. d. Wissensch.*, Göttingen, 1925.

(IX). E. Cartan, La géométrie des groupes simples. *Annali di Mat.* (4), 4 (1927).

(X). H. Hopf, Ueber die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen *Math. Annalen*, 95 (1925); Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Math. Annalen*, 96 (1926).

(XI). W. Rinow, Ueber Flächen mit Verschiebungselementen; H. Hopf und W. Rinow, Die topologischen Gestalten differentialgeometrisch verwandter Flächen; *Math. Annalen* (sous presse).

SUR LES FAMILLES CROISSANTES

DE

SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE DÉNOMBRABLE

PAR

W. Sierpiński (Varsovie).

Une famille F d'ensembles est dite *croissante*, si de deux ensembles de la famille F un est toujours une partie aliquote de l'autre. Une telle famille peut être ordonnée d'après la grandeur des ensembles qui la constituent, c'est-à-dire de deux ensembles de la famille F celui est regardé comme précédent qui est la partie aliquote de l'autre. A toute famille croissante d'ensembles correspond ainsi un type d'ordre [1].

[1] En ce qui concerne les types d'ordre, voir par exemple mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, chap. VII. Paris, Gauthier-Villars, 1928.

Soit D un ensemble dénombrable donné, par exemple l'ensemble de tous les nombres naturels. Dans cette note nous traiterons la question suivante:

φ étant un type d'ordre donné, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une famille croissante du type φ de sous-ensembles de D ?

Nous prouverons que *cette condition est que φ soit un type d'ordre d'un ensemble de nombres réels ordonné d'après leur grandeur.*

La condition est nécessaire. En effet, soit F une famille croissante de sous-ensembles de D. Soit E un sous-ensemble donné de D, par exemple l'ensemble de nombres naturels (différents) $n_1, n_2, n_3, \ldots$ Posons

$$f(\mathrm{E}) = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_3}} + \ldots$$

— ce sera évidemment un nombre réel positif ≤ 1.

Il est évident que si H est un autre sous-ensemble de D et si $\mathrm{E} < \mathrm{H}$, on a $f(\mathrm{E}) < f(\mathrm{H})$. La famille F est ainsi semblable à l'ensemble de tous les nombres réels $f(\mathrm{E})$ correspondant aux ensembles E de F.

La condition est suffisante. En effet, soit X un ensemble donné de nombres réels. Soit

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels (différents). x étant un nombre réel donné, désignons par $\mathrm{E}(x)$ l'ensemble de tous les indices n, tels que

$$r_n < x \ .$$

On voit sans peine que si $x < y$, $\mathrm{E}(x)$ est une partie aliquote de $\mathrm{E}(y)$ (puisque, si $x < y$, l'inégalité $r_n < x$ entraîne $r_n < y$, et, d'autre part, il existe un nombre rationnel r_k, tel que $x < r_k < y$, d'où résulte que k appartient à l'ensemble $\mathrm{E}(y)$ sans appartenir à $\mathrm{E}(x)$). La famille F de tous les ensembles $\mathrm{E}(x)$ correspondant aux nombres x de l'ensemble X est donc une famille de sous-ensembles de D qui est semblable à l'ensemble X ordonné d'après la grandeur de nombres qui le constituent.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Voici maintenant un problème connexe à celui que nous venons de résoudre:

φ étant un type d'ordre donné, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une famille croissante du type φ formée d'ensembles dénombrables ?

On peut démontrer sans peine que *cette condition est que φ soit un type d'un sous-ensemble d'un ensemble ordonné du type* $(1 + \lambda)\Omega$ (où λ désigne, comme on sait, le type d'ordre d'ensemble de tous les nombres réels et Ω le plus petit nombre transfini de la troisième classe).

Voici un exemple d'un tel ensemble. Soit U l'ensemble de tous les symboles de la forme

$$\alpha + x ,$$

où α est un nombre ordinal $< \Omega$ et x un nombre réel, tel que $0 \leqq x < 1$. Ordonnons l'ensemble U d'après la convention que

$$\alpha + x < \beta + y$$

si $\alpha < \beta$, ou bien si $\alpha = \beta$, $x < y$.

Le type d'ordre de l'ensemble U est $(1 + \lambda)\Omega$.

L'ensemble ordonné U jouit de la propriété remarquable suivante: quels que soient les éléments u et $v > u$ de U, l'ensemble de tous les éléments t de U, tels que $u < t < v$ est du type λ (c'est donc une propriété commune avec l'ensemble de tous les nombres réels, et, plus généralement, avec les ensembles des types λ, $1 + \lambda$ et $\lambda + 1$: cette propriété n'est donc pas caractéristique pour ces trois types).