Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1932)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA POLAIRE GÉNÉRALISÉE
Autor: d'Ocagne, M.
Kapitel: Généralités.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24611

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA POLAIRE GÉNÉRALISÉE

PAR

M. D'OCAGNE (Membre de l'Institut, Paris).

GÉNÉRALITÉS.

1. — La généralisation, que nous avons ici en vue, de la polaire d'un point par rapport à une conique résulte de la substitution à cette conique d'un système de deux lignes quelconques (M_1) et (M_2). Si donc une droite issue du point O rencontre ces courbes aux points M_1 et M_2, le point M de la polaire situé sur cette droite est le conjugué harmonique de O par rapport à M_1 et M_2, c'est-à-dire le point M tel que (bien entendu, en tenant compte du sens des vecteurs)

$$\frac{2}{OM} = \frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM_2} . \qquad (1)$$

Il est clair que, si M', M'_1, M'_2 constituent une autre position quelconque de ces trois points, *les droites* MM', $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, *qui joignent les points correspondants de deux divisions harmoniques ayant en commun le point* O, *sont concourantes.* Lorsque les droites OM et OM′ sont infiniment voisines, on en déduit que *les tangentes en* M, M_1 *et* M_2 *aux courbes que décrivent ces points sont concourantes.*

Si les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à O, le point M est rejeté à l'infini sur la droite joignant ces points. Les directions asymptotiques de la courbe (M) sont donc données par les droites joignant le point O aux points de rencontre d'une des courbes (M_1) ou (M_2) avec la symétrique de l'autre par rapport à O. La propriété des tangentes qui vient d'être énoncée

montre, en outre, que l'asymptote répondant à une des directions ainsi déterminées est constituée par la parallèle à cette direction, menée par la rencontre des tangentes aux points M_1 et M_2, symétriques par rapport à O, qui lui correspondent.

Il suit de là que, si les courbes (M_1) et (M_2) sont algébriques, d'ordres n_1 et n_2, la courbe (M) admet, en général, $n_1 n_2$ directions asymptotiques et est, par suite, d'ordre $n_1 n_2$. En particulier, si l'une des lignes (M_1) ou (M_2) est droite, la polaire est de même ordre que l'autre.

2. — Si l'on prend, par rapport au pôle O, les inverses (M'_1), (M'_2) et (M') des lignes (M_1) et (M_2) et de la polaire (M), on a, entre les vecteurs de ces trois dernières, la relation

$$2\,OM' = OM'_1 + OM'_2$$

qui montre que le point M′ est le milieu de $M'_1 M'_2$, ce pourquoi la courbe (M′) peut être dite la *moyenne* de (M'_1) et (M'_2) pour le point O.

Remarquons que si (M″) est l'homothétique de (M′) par rapport à O, avec le rapport d'homothétie 2, auquel cas, il y a, au point de vue de la nature géométrique, identité entre (M′) et (M″), on a

$$OM'' = OM'_1 + OM'_2 ,$$

ou, si (M''_2) est la symétrique de (M'_2) par rapport à O,

$$OM'' = OM'_1 - OM''_2 = M''_2 M'_1 .$$

Lorsque la ligne (M'_1) est droite, cette égalité définit la *cissoïdale* de la courbe (M''_2) pour le point O et la droite (M'_1).

3. — Rendons-nous compte maintenant de la façon dont le centre de courbure m répondant au point M de la polaire se déduit des centres de courbure m_1 et m_2 répondant aux points M_1 et M_2. Pour cela, à titre de lemme, nous allons établir le lien qui existe entre le centre de courbure m et la tangente à la courbe que décrit l'extrémité de la sous-tangente polaire de (M), c'est-à-dire le point de rencontre T de la tangente en M et de la

perpendiculaire élevée en O à OM[1], qui, d'autre part rencontre la normale à la même courbe en N (fig. 1).

La normale à la courbe (T) coupant en N′ la normale MN

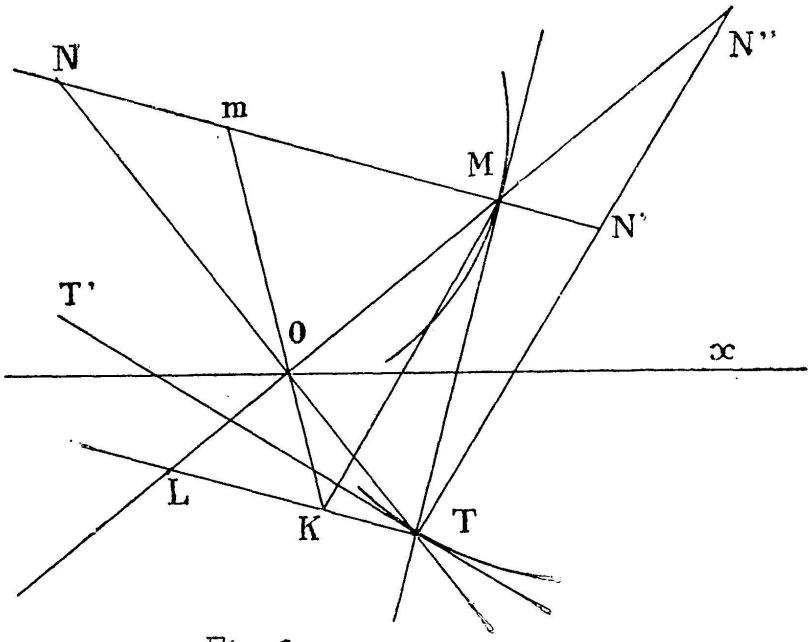

Fig. 1.

à l'enveloppe de MT, une formule bien connue de Mannheim donne pour le rapport des arcs infiniment petits d (M) et d (T) décrits simultanément par les points M et T

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{T})} = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{TN}'} .$$

Mais les droites rectangulaires OM et OT tournant ensemble du même angle $d\omega$, on a aussi, MN et TN″ étant les normales polaires correspondantes,

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{MN}.d\omega , \qquad d(\mathrm{T}) = \mathrm{TN}''.d\omega .$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{TN}'}{\mathrm{TN}''} .$$

[1] La courbe (T) constitue une *adjointe infinitésimale* de la courbe (M), au sens défini dans mon mémoire du *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. LII, p. 132 et 395). Le nouvel exemple ici traité serait à joindre à celui qui figure au n° 7 de ce mémoire.

Or, si la perpendiculaire élevée en T à TM coupe OM en L et Om en K, on a

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{LK}}{\mathrm{LT}}, \qquad \frac{\mathrm{TN}'}{\mathrm{TN}''} = \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{LN}''}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{LK}}{\mathrm{LT}} = \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{LN}''},$$

ce qui montre que MK est parallèle à TN″, autrement dit perpendiculaire à la tangente TT′ en T. Ainsi, *les perpendiculaires menées par chacun des points* M *et* T *à la tangente répondant à l'autre se coupent sur la droite qui joint le point* O *au centre de courbure* m. De là le moyen, si l'on connaît le centre de courbure m, d'en déduire la tangente TT′ et *vice versa*.

Ce lemme étant établi, remarquons que si ω est l'angle que OM fait avec l'axe Ox, on a

$$d\left(\frac{1}{\mathrm{OM}}\right) = -\frac{d.\mathrm{OM}}{\mathrm{OM}^2} = -\frac{\mathrm{ON}.d\omega}{\mathrm{OM}^2} = -\frac{d\omega}{\mathrm{OT}}.$$

Appliquant cette formule à la différentielle de (1), en appelant OT_1 et OT_2 les sous-tangentes polaires de (T_1) et (T_2), on voit que

$$\frac{2}{\mathrm{OT}} = \frac{1}{\mathrm{OT}_1} + \frac{1}{\mathrm{OT}_2}, \tag{2}$$

c'est-à-dire que (T) est aussi la polaire de O par rapport à (T_1) et (T_2); par suite, les tangentes à ces trois courbes sont concourantes et la question que nous nous étions posée est résolue. En effet, la construction précédente permet de déduire des centres de courbure m_1 et m_2 les tangentes en T_1 et en T_2 dont le point de rencontre joint à T donne la tangente en T, et de cette tangente on déduit le centre de courbure m.

Polaires par rapport a cercle et droite.

4. — Les cas où les courbes (M_1) et (M_2) sont un cercle et une droite — où, par suite, d'après la fin du n° 1, la polaire (M) est