I. Polaire d'un point par rapport a une droite ET UN CERCLE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LA POLAIRE GÉNÉRALISÉE, ET SUR LA COURBE MOYENNE DE DEUX CERCLES

PAR

R. HARMEGNIES (Paris).

Le présent travail fait suite au mémoire de M. d'Ocagne « Sur la polaire généralisée ». M. d'Ocagne a bien voulu me proposer de chercher une solution géométrique pour quelques uns de ses résultats; c'est l'objet de la première partie. La deuxième partie est consacrée à une généralisation de l'un de ces résultats; elle aboutit à une propriété intéressante, et probablement nouvelle, de la courbe du trois-barres.

I. POLAIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE ET UN CERCLE.

1. — D'après la définition même de la polaire généralisée, la polaire du point O par rapport à une droite (M_2) et à une courbe quelconque (M_1) est une courbe (M) homologique de (M_1), O et (M_2) étant le pôle et l'axe d'homologie. Si donc, la conique (M) et le point O étant donnés, nous cherchons le cercle et la droite qui leur sont polairement associés, cela revient à chercher une homologie de pôle O qui transforme la conique en cercle. Désignons par I et J les points cycliques, par α et β, α' et β', les points d'intersection avec la conique des droites OI, OJ (nous supposons que le point O n'est pas sur la conique, ni sur la droite de l'infini); l'axe d'homologie sera évidemment homothétique par rapport à O, dans le rapport $\frac{1}{2}$, de l'une des droites, $\alpha\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta\beta'$, $\beta'\alpha$.

Transformons maintenant la figure par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O; les points α, β, α', β', donnent les tangentes isotropes de la conique transformée; les droites

$\alpha\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta\beta'$, $\beta'\alpha$, donnent les foyers de cette conique, dont deux sont toujours réels, et deux toujours imaginaires. *Une conique réelle donnée est donc, en général, doublement polaire d'un point réel quelconque de son plan par rapport à un cercle réel et une droite réelle associés à ce point* (Cf. d'Ocagne, n° 13).

Si le point O est sur la conique (M_1), on trouvera de même une solution unique, toujours réelle. Si le point O est à l'infini, on verra sans difficulté que la courbe doit être une ellipse, et que, si a et b désignent les demi-axes, on doit avoir $a > 2b$; la direction du point O est alors définie par $c \cos \omega = \pm \sqrt{a(a - 2b)}$ $(c^2 = a^2 - b^2)$; à chacune des deux directions ainsi définies correspond une infinité simple d'axes d'homologie, tous parallèles.

2. — L'interprétation donnée ci-dessus permet de discuter facilement le cas où O décrit un axe de la conique (M_1). Deux des droites $\alpha\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta\beta'$, $\beta'\alpha$, sont alors perpendiculaires à cet axe; nous pouvons toujours supposer que ce sont les droites $\alpha\alpha'$. $\beta\beta'$. La droite $\alpha\beta'$, par exemple, s'obtient alors en prenant les points d'intersection avec la conique des droites $\beta\alpha$ et $\beta\beta'$, qui ont toutes deux une direction fixe. L'enveloppe de $\alpha\beta'$ est donc une conique bitangente à (M_2) en ses points à l'infini; l'enveloppe de $\alpha'\beta$, symétrique par rapport à l'axe considéré, est la même conique; il suffit de placer O en l'une des extrémités de l'axe pour voir que cette extrémité est un foyer de la conique trouvée; si l'on place O en l'un des foyers porté par l'axe, on voit que la conique trouvée est tangente à la directrice correspondante.

En définitive, *l'enveloppe des cordes communes à une conique à centre* (M_2) *et à un cercle de rayon nul dont le centre décrit un axe de la conique, est une conique homothétique et concentrique à la conique donnée: elle admet pour foyers les sommets de* (M_2) *portés par l'axe considéré, et pour tangentes aux sommets les directrices de* (M_2) *perpendiculaires à cet axe.*

Le cas où la conique (M_2) est une parabole se traite sans difficulté et donne le résultat suivant: *l'enveloppe des cordes communes à une parabole* (M_2) *et à un cercle de rayon nul dont le centre décrit l'axe de la parabole, est une parabole qui se déduit de* (M_2) *par une translation équipollente à* $\overrightarrow{FS}$, F *et* S *étant le foyer et le sommet de* (M_2).

Remarquons enfin que les cordes $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$ se coupent au pied O′ de la polaire de O, sur l'axe considéré. Il en résulte immédiatement que, si (M_2) est une ellipse, ces cordes sont réelles ou imaginaires suivant que O′ est extérieur ou intérieur à l'ellipse enveloppe de $\alpha\beta'$, c'est-à-dire suivant que O est intérieur ou extérieur au segment qui joint les foyers; si (M_2) et une hyperbole, c'est l'inverse qui est vrai. Si (M_2) est une parabole, les cordes $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$ sont réelles quand O est porté par le segment qui joint F au point à l'infini de la parabole, à l'intérieur de celle-ci.

II. Courbe moyenne de deux cercles.

1. — M. d'Ocagne a montré (*loc. cit.*, n° 13) que l'inverse d'une conique (ou, ce qui revient au même, une podaire de conique) peut être définie, de deux manières, comme la courbe moyenne, par rapport à son point double, de deux cercles réels dont l'un passe par ce point double. Proposons-nous de chercher la courbe moyenne de deux cercles quelconques par rapport à un point quelconque O, non situé sur ces cercles.

Nous désignerons par C_1 et C_2 les centres des deux cercles, par A_1 et B_1, A_2 et B_2, les points où les deux cercles sont coupés par une sécante issue de O. Une telle sécante donne quatre points du lieu. D'autre part, O est évidemment point double, les tangentes en O étant les deux droites (en général distinctes) qui passent par les points communs à l'un des cercles et au symétrique de l'autre par rapport à O; une difficulté pourrait s'élever relativement aux droites isotropes issues de O, mais nous verrons plus bas que ces droites donnent en général des points de la courbe distincts de O; le cas d'exception se traiterait par passage à la limite. *La courbe est donc du sixième degré.* Elle a deux autres points doubles correspondant aux sécantes issues de O qui déterminent des cordes égales sur les deux cercles.

Les seuls points à l'infini possibles sont les points cycliques I et J. Cherchons à déterminer les tangentes en ces points. Une sécante issue de O, et voisine de OI, coupe les cercles en A_1 et A_2 (à distance finie, si O n'est pas le centre de l'un des cercles) et en