UNE DÉMONSTRATION SIMPLE DE LA FORMULE D'INTERPOLATION DE S. BERNSTEIN

Autor(en): **Wundheiler, Alexandre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24615

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

UNE DÉMONSTRATION SIMPLE DE LA FORMULE D'INTERPOLATION DE S. BERNSTEIN

PAR

Alexandre WUNDHEILER (Varsovie).

La formule de M. Bernstein:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right)\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{1}$$

donne un développement effectif de la fonction continue $f(x)$ en une suite uniformément convergente de polynomes. En tenant compte du théorème bien connu de Weierstrass, il suffit de démontrer cette formule pour les polynomes $f(x)$, ce qui se réduit à sa démonstration pour $f(x) = x^p$, vu sa dépendance linéaire de $f(x)$. Il s'agit alors de démontrer pour p entier positif

$$x^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{k^p}{m^p}\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}. \tag{2}$$

Nous partons, dans ce but, de l'identité assez proche de (2):

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{m(m-1)\ldots(m-p+1)}\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = x^p. \tag{3}$$

Sa vérification est immédiate. En effet, le premier membre est égal à

$$x^p \sum_{p}^{m} \frac{(m-p)\ldots(m-k+1)}{(k-p)\ldots 1} x^{k-p}(1-x)^{m-p-(k-p)}$$

$$= x^p \sum_{i=0}^{m-p} \binom{m-p}{i} x^i (1-x)^{m-p-i} = x^p,$$

car cette somme est le développement du binôme

$$(x + \overline{1 - x})^{m-p} = 1 \ .$$

Il s'agit maintenant de comparer la somme (3) avec

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{k^p}{m^p} \binom{m}{k} x^k (1 - x)^{m-k} \ . \tag{4}$$

Cette comparaison est fondée sur la remarque bien simple que, si k est suffisamment supérieur à $p \left(k > \frac{p^2}{\varepsilon}\right)$, les expressions

$$\frac{k(k-1) \ldots (k-p+1)}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{k^p}{m^p}$$

diffèrent d'aussi peu que l'on veut. Si, de plus, m est suffisamment grand, chacun de ces termes mêmes, pour les autres valeurs de k, sera arbitrairement petit.

D'une manière précise, pour $p \leqq k \leqq m$ on aura:

$$0 \leqq \frac{k^p}{m^p} - \frac{k(k-1) \ldots (k-p+1)}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} \leqq \frac{k^p}{m^p} - \frac{(k-p)^p}{m^p}$$

$$= \frac{k^p}{m^p}\left[1 - \left(1 - \frac{p}{k}\right)^p\right] \leqq 1 - \left(1 - \frac{p}{k}\right)^p \leqq 1 - \left(1 - \frac{p^2}{k}\right)$$

$$= \frac{p^2}{k} < \varepsilon \ , \qquad \text{pour} \qquad k > \frac{p^2}{\varepsilon} \ .$$

Tandis que, pour $k \leqq \frac{p^2}{\varepsilon}$:

$$\frac{k(k-1) \ldots (k-p+1)}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} \leqq \frac{k^p}{(m-p)^p} \leqq \left(\frac{2k}{m}\right)^p \leqq \left(\frac{2p^2}{\varepsilon m}\right)^p < \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

si

$$m > 2p \qquad \text{et} \qquad > \frac{2p^2}{\varepsilon} \sqrt[p]{\frac{2}{\varepsilon}} \ .$$

On aura donc aussi:

$$\frac{k^p}{m^p} < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

La différence des sommes (3) et (4) sera donc, pour

$$m > 2p \qquad \text{et} \qquad > \frac{2p^2}{\varepsilon} \sqrt[p]{\frac{2}{\varepsilon}},$$

moindre que

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon \binom{m}{k} x^k (1 - x)^{m-k} = \varepsilon,$$

d'où on tire qu'elle tend uniformément vers zéro.

SUR UNE LOI CORRECTIVE DE LA LOI DE NEWTON POUR LA DÉTERMINATION DU DÉPLACEMENT DU PÉRIHÉLIE ET DE LA DÉVIATION DES RAYONS LUMINEUX [1]

PAR

M. I. TZÉNOFF (Sofia).

---

1. — Dans cet article nous nous posons le problème suivant: en prenant comme point de départ la seconde loi du mouvement de Newton (la variation de la quantité de mouvement est égale, en grandeur et en direction à la force appliquée au point matériel) déterminer le mouvement d'un point matériel de masse variable m, attiré suivant la loi de Newton par un centre fixe de masse M (par exemple le Soleil), en supposant que la masse variable m ne dépend que de la distance r du point au centre et que, pendant toute la durée du mouvement, l'intégrale de la force vive existe. La demi-force vive ou l'énergie cinétique du point est donnée par la formule $mc^2 - m_0c^2$ (valable pour les petites et pour les grandes

[1] A propos de l'article de M. G. MANEFF, « Considération substantielle de la Gravitation », imprimé dans les *Annales de l'Université de Sofia*, 1930-31.