Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1932)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

nombres entiers ordinaires dont aucun ne contient un facteur carré. L'auteur traite principalement dans cette première partie de la forme des entiers du corps K, de la base des entiers, du discriminant et de la forme fondamentale du corps, de la décomposition des idéaux, des unités du corps et du nombre de classes d'idéaux. Plusieurs démonstrations sont d'ailleurs faites pour le cas de $n = 3$ seulement.

La seconde partie est consacrée à l'étude des quaternions dits complexes, c'est-à-dire des quaternions dont les coordonnées sont tirées d'un corps algébrique, en l'espèce le corps K étudié plus haut. Les quaternions complexes présentent avec les quaternions à coordonnées rationnelles de grandes analogies mais aussi de profondes différences. C'est ainsi que si A représente un quaternion complexe différent de zéro, le produit AB de A par un quaternion complexe B peut s'annuler sans que B soit nul. A est alors dit un *diviseur de zéro*.

L'auteur appelle *idéal de quaternions complexes* et représente par $\mathfrak{A} \equiv id\,\{\mathfrak{a}\}$, l'ensemble infini des quaternions complexes entiers dont les quatre coordonnées parcourent indépendamment les unes des autres tous les nombres de l'idéal $\mathfrak{a}$ du corps K des coordonnées. Cette généralisation de la notion d'idéal a permis d'étendre au domaine des quaternions complexes celle d'indicateur d'Euler ainsi que le théorème de Fermat.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un article de MM. Barzin et Errera.

A propos de l'article de MM. Barzin et Errera dans le tome XXX de cette revue (p. 248) je voudrais faire les remarques suivantes: D'abord la dénomination « logique de Heyting » ne me paraît pas heureuse, toutes les idées fondamentales de cette logique provenant de M. Brouwer; je préférerais « logique intuitionniste » ou bien « logique non-aristotélienne », ce dernier terme pouvant d'ailleurs aussi désigner les logiques purement formelles non conformes à la logique classique que quelques savants polonais ont construit en ces dernières années. Ensuite je signale aux lecteurs l'article intéressant de M. Kolmogoroff (*Math. Z.* 35, p. 58), où l'auteur donne une interprétation remarquable de mes formules comme constituant une logique des problèmes. Cette interprétation est indépendante des idées intuitionnistes; cependant, pour le mathématicien intuitionniste c'est seulement cette

logique des problèmes qui a une signification, tandis que pour lui la logique classique des propositions reste dépourvue de sens.

En revenant à l'article de MM. Barzin et Errera je remarque que le « sophisme » qui se trouve en haut de la page 249 ne me semble être qu'un jeu de mots, portant sur deux significations distinctes des mots « ne pas ». En disant que $\sim p$ signifie « la proposition p n'est pas vraie » on veut dire « il est *impossible* que p soit vraie »; au contraire, si un intuitionniste, en s'exprimant comme MM. Barzin et Errera, disait que le principe du tiers exclu « n'est pas vrai », il voudrait dire que ce principe *n'a pas été démontré*, de sorte qu'on n'a pas le droit d'affirmer qu'il est vrai.

Les propositions de la logique intuitionniste ne portent que sur les mathématiques; elles sont elles-mêmes des propositions mathématiques très générales. Généralement, on considère le principe du tiers exclu comme évident; seulement, comme l'a remarqué M. Brouwer, cette opinion se base sur une interprétation de nature métaphysique, dont on déduit que chaque proposition possède en soi et indépendamment de notre connaissance le caractère du vrai ou du faux. Or, cette interprétation est très douteuse, surtout quand il s'agit d'êtres abstraits comme les entités mathématiques; d'ailleurs, et c'est sur ce point que M. Brouwer est parfaitement d'accord avec MM. Barzin et Errera, la philosophie n'a rien à faire dans les démonstrations mathématiques. Mais M. Brouwer en tire la conclusion opposée à celle de MM. Barzin et Errera, à savoir qu'il faut considérer le principe du tiers exclu comme n'étant ni évident, ni démontré d'une manière convaincante. Ainsi, il ne rejette pas ce principe, mais il refuse de l'admettre, tout comme on refusera d'admettre un théorème quelconque tant qu'on n'en a pas vu la démonstration. En retournant un argument de MM. Barzin et Errera on peut dire que l'attitude des partisans de la logique classique ressemble à celle du mathématicien imaginaire qui soutiendrait que tout espace abstrait admet une métrique et qui reprocherait à ceux qui exigeraient une démonstration de ce théorème de vouloir attaquer la liberté de la science.

Enschede (Hollande). A. HEYTING.

Note sur la logique de M. Heyting[1].

Si nous avons donné à la logique publiée par M. Heyting son nom, c'est que les nuances d'opinion dans cette question difficile sont si nombreuses, qu'il est aisé de se croire d'accord sans l'être. Et jusqu'au

[1] Voir M. BARZIN et A. ERRERA, Sur la Logique de M. Brouwer (*Bull. Cl. Sc. Ac. R. Belg.*, Brux., 1927).
M. BARZIN et A. ERRERA, Sur le principe du tiers exclu (*Arch. Soc. B. Philos.*, Brux., 1929).

jour où M. Brouwer aura fait une déclaration explicite d'adhésion à cette logique, il nous a paru prudent de considérer l'œuvre de M. Heyting comme lui appartenant en propre.

M. Heyting écarte en quelques mots le sophisme que nous avons signalé dans sa logique. Nous craignons qu'il ne s'illusionne sur l'efficacité de ce geste. Il est bien vrai que nous reconnaissons deux sens à la négation, mais cela ne diminue en rien la portée de ce que nous avons avancé.

Expliquons-nous à ce sujet. Les brouwériens emploient la négation ($\sim$) pour signifier que la proposition est *impossible*, ou en d'autres termes, qu'elle contient une contradiction. Mais en dehors de ce cas, il est un autre état de choses que nous sommes libres de désigner par un autre symbole. La table sur laquelle nous écrivons est brune: il n'est pas impossible qu'elle soit verte, car un pot de couleur ferait l'affaire; néanmoins elle n'est pas revêtue de la propriété du vert. Pour expliquer cet état, nous disons qu'elle *n*'est *pas* verte. Ces mots *ne pas* sont un symbole différent de la négation brouwérienne, mais dont l'usage est parfaitement clair. Notons au surplus que lorsqu'une proposition reçoit la négation brouwérienne, cela implique qu'elle *n*'est *pas* vraie au sens où nous venons de définir *ne pas* (car ce qui est impossible *n*'est *pas* vrai).

L'usage de notre langage étant ainsi réglé, M. Heyting démontre qu'il est impossible qu'il existe une proposition tierce, c'est-à-dire une proposition qui ne soit *ni* vraie *ni* fausse. (*Ni* est employé exactement dans le sens du *ne pas* de tantôt). Or, d'une part, M. Heyting, à la suite de M. Brouwer, se refuse à reconnaître au principe du tiers exclu, la propriété du vrai: cette proposition (le principe du tiers) *n*'est donc *pas* vraie. D'autre part, M. Heyting démontre formellement qu'il est impossible qu'elle soit fausse: elle *n*'est donc *pas* fausse. Nous sommes donc en présence d'une proposition qui n'est *ni* vraie *ni* fausse, c'est-à-dire qui est tierce : ce qui implique la fausseté du principe du tiers exclu. La contradiction est patente.

Quant à son affirmation que les formalistes soutiennent que toutes les propositions sont revêtues métaphysiquement de la propriété du vrai ou du faux, rien n'est plus contraire à la vérité. En effet, pour les formalistes, la vérité (ou la fausseté) d'une proposition quelconque n'est déterminée qu'à partir du moment où le mathématicien a déterminé arbitrairement le système des postulats qu'il emploie. Une fois ce choix fait, est vraie toute proposition qui peut être déduite (c'est-à-dire construite) à partir des postulats initiaux. Est fausse toute proposition en contradiction avec l'un des postulats ou avec ses conséquences.

Pouvons-nous imaginer un troisième cas, c'est-à-dire une proposition qui ne serait ni vraie ni fausse au sens que nous venons de définir ? Une telle proposition ne découlerait pas du système des postulats; d'autre part, elle ne serait en contradiction avec aucune des proposi-

tions qui découlent de ce système. Si l'on veut relire ces conditions, on verra que nous avons défini de la sorte un postulat nouveau, et que nous pouvons le joindre, lui ou sa négation, à nos postulats primitifs, sans introduire dans le système de contradiction. Un postulat, c'est donc une proposition qui est vraie *ou* fausse au choix (et qui par conséquent n'est jamais *ni* vraie *ni* fausse).

Si le principe du tiers exclu est, dans la logique de M. Heyting, un postulat semblable, tout s'explique. Sauf le prosélytisme des intuitionnistes qui nous paraissent aussi incompréhensibles que le serait un mathématicien faisant de l'analysis situs et interdisant énergiquement à ses collègues de faire de la géométrie métrique.

Demander notamment qu'on démontre le principe du tiers exclu, est pour le formaliste une exigence aussi invraisemblable que si l'on demandait de démontrer n'importe quel autre postulat, par exemple le principe de contradiction. Si l'on veut distinguer parmi les axiomes ceux qui sont vrais et ceux qui sont faux, cela ne peut être qu'au nom de raisons métaphysiques inadmissibles en mathématiques.

Bruxelles. M. Barzin et A. Errera.

CHRONIQUE

Congrès international des Mathématiciens.

Zurich, septembre 1932.

Le 9me Congrès international des mathématiciens a eu lieu à Zurich, du 4 au 12 septembre 1932, sous la présidence de M. R. Fueter, professeur à l'Université de Zurich. Le temps et la place nous manquent pour donner dans ce fascicule un compte rendu détaillé du congrès. Mais nous tenons à dire dès maintenant que le succès a été complet grâce à l'intérêt des communications présentées et à l'excellente organisation des séances, réceptions et excursions.

Le prochain numéro de *L'Enseignement mathématique* contiendra la liste complète des conférences et communications, ainsi que le compte rendu des séances de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique et de l'Union internationale mathématique.

En attendant voici la liste des *pays représentés:* Afrique du Sud, Allemagne, Angleterre, Autriche, Belgique, Bulgarie, Canada, Chine, Costa-Rica, Danemark, Egypte, Espagne, Etats-Unis d'Amérique,