Sur la logique intuitionniste.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

abstraire les caractères d'une «logique des liaisons» ou d'une «logique des objets en devenir», dans laquelle il soit possible d'éviter *a priori* les apories et les antinonies bien connues.

Qu'il me soit encore permis, sous la forme commode du dialogue, d'esquisser mon point de vue.

La logique reconnaît qu'en voulant tout sauver de son prestige, elle s'est mise dans une position incommode. Elle fait la part du feu.

La logique: Je vois que tu ne renieras pas mon autorité si je t'en dis les limites. Mes lois ne touchent pas directement le réel. Les objets que tu te représentes ne sont pas non plus absolument adéquats au réel; ils n'y correspondent que d'une façon sommaire et schématique. Appelle « objets aristotéliciens » les objets que tu te représentes comme dotés de propriétés *a priori*, selon lesquelles tu les classes et tu les juges. Mes lois sont ce que tu pourrais appeler « les lois naturelles » de ce monde schématisé des objets aristotéliciens.

L'élève: Je me sens à la fois déçu et tranquillisé. Mais n'existe-t-il pas, je veux dire n'avons-nous pas l'idée d'objets qui ne puissent être dits aristotéliciens ? Et votre juridiction ne les atteint-elles pas ?

La logique: Je te dirai une autre fois comment je puis me transformer en une logique des objets en devenir, et sans détermination préalable. Quand tu l'auras conçue, tu verras disparaître les difficultés qui t'ont arrêté[1].

Zurich, 15 mai 1933. F. GONSETH.

Sur la logique intuitionniste.

Réponse à MM. Barzin et Errera.

Je suis parfaitement disposé à m'expliquer plus en détail sur la contradiction que vous croyez avoir trouvée dans la logique intuitionniste, d'autant plus que vos dernières explications (voir ce journal, XXXI, p. 122) mettent clairement en lumière le point où, à mes yeux, votre raisonnement est en défaut.

Dans mon travail sur la logique formelle (*S.-B. preuss. Akad. Wiss.* 1930, p. 42) je n'emploie qu'une seule négation qui signifie l'*impossible*. Il s'en suit que dans tous les énoncés qu'on peut tirer de ce travail la négation doit avoir cette signification. Ainsi, votre interprétation du théorème: « Il est impossible qu'il existe une proposition qui ne soit *ni* vraie *ni* fausse » est incorrecte, *ni* devant être interprété dans le sens de l'*impossibilité*. D'autre part, comme vous le remarquez, dans l'énoncé: « le principe du tiers exclu n'est

[1] F. GONSETH. Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles, et sur la logique des relations. *Commentarii math, helv.*, vol. 5, 1933, p. 108-136.

pas vrai » *ne pas* ne désigne pas l'impossibilité mais une autre notion plus faible; en conséquence cet énoncé ne figure pas dans le travail que je viens de citer. Par l'interprétation donnée tantôt, qui était contenue entièrement dans mes travaux antérieurs, la contradiction disparaît. Je dois refuser toute responsabilité des conséquences d'une interprétation que je n'ai jamais ni formulée ni sous-entendue.

Permettez-moi de dire encore quelques mots sur la deuxième signification de *ne pas* que vous n'avez illustrée que par un exemple non-mathématique. On ne peut dire que le principe du tiers exclu « n'est pas vrai » que si l'on fait coincider le sens du mot *vrai* avec celui de *démontré*, interprétation qui s'impose à l'intuitionniste, mais qui n'est pas indispensable pour comprendre ses idées. Qui ne l'accepte pas, dira: « On ne sait pas si le principe du tiers exclu est vrai ». Or, cette phrase n'exprime aucun théorème ni de mathématiques ni de logique; elle n'est qu'un avertissement que l'énoncé « le principe du tiers exclu est vrai » ne doit pas être fait à l'état actuel de la science. Il est évident qu'un tel avertissement ne peut pas conduire à une contradiction. Formellement, la logique intuitionniste ne diffère de la logique classique que par le biffage d'un axiome, opération qui ne saurait engendrer de contradiction; les explications en dehors du système formel ne servent qu'à justifier des avertissements comme celui que nous venons de considérer. On peut donc écarter d'avance la possibilité d'une contradiction dans la logique intuitionniste; toute discussion sur ce sujet serait inutile et même nuisible si elle ne pouvait servir à éclaircir les fondements de la mathématique nouvelle de M. Brouwer.

Je dois me défendre d'avoir attaqué la position des formalistes; dans ma note précédente, en parlant des « partisans de la logique classique » je n'ai pas eu en vue les formalistes conséquents, qui eux-mêmes n'accepteraient ce titre qu'avec quelque réserve. Je ne suis pas certain que nous entendons la même chose par ce terme de « formalistes ». Pour moi est formaliste celui pour qui les formules mathématiques sont des suites de signes parfaitement dépourvues de sens; c'est seulement sous cette condition que le choix des axiomes est entièrement libre. J'appelle partisans de la logique classique ceux qui soutiennent que les démonstrations mathématiques expriment des pensées qui, pour être cohérentes, sont soumises aux règles de la logique classique. De ce point de vue je ne vois pas comment les axiomes peuvent être arbitraires. Si une proposition a une signification, on peut demander si elle est vraie ou non et on n'est pas libre de fixer arbitrairement la réponse. Des deux choses l'une: ou bien les mathématiques consistent de pensées humaines, ou bien elles sont purement formelles. Le but de M. Brouwer est de tirer toutes les conséquences de la première alternative

Enschede (Hollande) 11 février 1933. A. HEYTING.

Réponse à M. A. Heyting.

Dans sa réplique, M. HEYTING prétend n'employer que la négation forte, celle qui marque l'impossible, le contradictoire et éviter soigneusement la négation faible, plus générale que l'autre et qui signifie l'exclusion hors d'une classe ou l'inapplicabilité d'un prédicat.

Or, l'expression « une proposition *ni vraie ni fausse* », en abrégé: *tierce*, prendra des sens différents, selon que les mots *ni* sont des négations fortes ou faibles.

Dans son théorème qu'on pouvait lire: « *il est faux que le principe du tiers exclu soit faux* », il ne visait donc que le tiers étroit correspondant à la négation forte; et l'exemple que nous avons indiqué d'une proposition tierce au sens large, n'apparaît plus comme une preuve que, dans le système intuitionniste, le principe du tiers exclu soit faux. Le sophisme relevé par nous s'évanouit donc. Mais à quel prix ?

Pour pouvoir faire cette distinction entre les deux sortes de négations, M. HEYTING est amené à *identifier* le vrai avec le démontré vrai et le faux avec le démontré faux; le tiers, ce qui n'est pas démontré vrai ni dém ntré faux, c'est alors l'incertain.

Nous pensons d'ailleurs qu'il se fait illusion, lorsqu'il croit n'employer que la négation forte. En réalité, refuser pour ses démonstrations un principe quelconque, en délimitant ceux qu'il accepte, c'est précisément employer la négation faible de ce principe, par son *exclusion de la classe* des prémisses avouées. La seconde espèce de négation est donc implicitement mais nécessairement présente dans ses postulats.

On pourrait relever aussi ce que M. HEYTING lui-même dit du principe du tiers exclu, incertain parce qu'indémontré; mais « ...cette phrase n'exprime aucun théorème ni de mathématiques ni de logique; elle n'est qu'un avertissement que l'énoncé « le principe du tiers exclu est vrai » ne doit pas être fait dans l'état actuel de la science ». Ainsi, les innombrables et beaux travaux, où l'on tire des conclusions de l'hypothèse célèbre, mais incertaine, de RIEMANN sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$, ce ne sont pas des propositions mathématiques, c'est-à-dire hypothétiques, mais de purs avertissements.

Incidemment, nous pensons que la démonstration des postulats ne se posait pour personne. Sollicités aujourd'hui de démontrer le principe du tiers exclu avant de l'employer, serons-nous demain sommés de prouver aussi le principe de contradiction ?

On est donc arrivé à ceci, que les intuitionnistes appellent vrai ce que les formalistes appellent démontré; et cette démarche n'est censée être qu'une modification du langage. L'inconvénient de celui qu'on nous propose, nous l'avons souligné ailleurs: il introduit l'accidentel et le subjectif dans la Science, une proposition *devenant* vraie, le jour où quelqu'un la démontre, et cessant de l'être, s'il perd sa démonstration !

M. Brouwer n'avait-il pour but qu'une pure transformation verbale, d'ailleurs malheureuse selon nous, quand il *interdisait* à tous l'emploi du principe du tiers exclu, non parce qu'indémontré, mais parce qu'inacceptable, et parce que les propositions qu'on en déduit sont « onjuist »[1] ? D'où il tirait la nécessité de refaire toute la mathématique pour chasser les derniers vestiges d'un aussi mauvais principe et de créer ces *théorèmes intuitionnistes*, auxquels s'applique, depuis tantôt vingt ans, toute son Ecole ? Que conclut aujourd'hui son disciple, M. Heyting ? « De deux choses l'une: ou bien les mathématiques consistent en pensées humaines, ou bien elles sont purement formelles. Le but de M. Brouwer est de tirer toutes les conséquences de la première alternative. » Combien maigre est cet aboutissement de ce qui devait être une grande révolution ! Nous attendions de solides raisons pour changer toute notre manière de penser; on nous propose arbitrairement la modification gratuite du sens de deux mots.

Libre aux intuitionnistes de faire ces changements de langage et, par conséquent, avec moins de prémisses, de trouver moins de théorèmes; d'ailleurs, ils reconnaissent eux-mêmes que c'est un appauvrissement de la science. Libre à nous de ne pas les suivre.

Bruxelles, 18 mai 1933. M. Barzin et A. Errera.

Réponse à MM. Barzin et Errera.

Ayant atteint l'accord sur le point essentiel, nous pourrions terminer la discussion. Permettez-moi seulement quelques mots sur les questions de *valeur*, que j'ai évité jusqu'ici pour ne pas troubler les points matériels qui étaient en débat.

Vraiment, la question de savoir si l'on cultivera les mathématiques pures comme un jeu avec des signes sur le papier, sans aucune signification, ou comme une science créée par l'esprit humain et nous révélant les lois de son activité, ne se réduit pas à une simple question de langage. Comme je l'ai déjà dit, l'identification du vrai avec le démontré n'est pas indispensable pour comprendre les idées de M. Brouwer. La révolution n'est pas arrêtée par ce fait qu'on ne peut défendre aux formalistes de mettre leurs signes sur le papier. Il est essentiel que leurs suites de signes, si l'on cherche à les interpréter, donnent des raisonnements qui sont « onjuist » (erronés); par suite, ils n'ont aucun droit de proclamer leurs résultats comme « vrais ». Pour qui se décide au formalisme conséquent, la révolution n'est pas moins grande: il doit renoncer à toute interprétation de ses énoncés

[1] L.-E.-J. Brouwer, Over de rol van het principium tertii exclusi in de Wiskunde in het bijzonder in de functie-theorie. *Wis. en Natuurkundig Tijdschrift*, II (1-2), Ad. Hoste, Gand, 1923.

et les considérer comme des suites de figures dépourvues de sens. Qui, avant M. Hilbert, songeait à considérer les mathématiques comme un jeu arbitraire ?

D'autre part, la nécessité de sacrifier plusieurs énoncés classiques n'entraîne pas forcément un appauvrissement de la science. La subtilité des nuances logiques engendre des distinctions mathématiques et des finesses de démonstration d'un charme incomparable. Même celui qui cherche la beauté dans le nombre des théorèmes sera content, car par ces distinctions nouvelles beaucoup de théorèmes se divisent en plusieurs cas différents. Qui veut se convaincre de la beauté caractéristique des mathématiques intuitionnistes, qu'il étudie un des chapitres qui en sont déjà développés ou, mieux encore, qu'il se résolve à refaire de façon intuitionniste quelque théorie classique non trop compliquée. Il ne se repentira pas de sa peine.

Enschede (Hollande), 19 juin 1933. A. HEYTING.

Le champ terrestre de la gravitation au point de vue relativiste.

Les expériences optiques exécutées par Dayton C. MILLER à l'Observatoire de Mont-Wilson en Californie, dont il communiqua lui-même les résultats au Congrès de l'American Association for the Advancement of Science [voir *Proceedings of the National Academy of Sciences* (Washington), juin 1925], constituèrent, ainsi qu'il est bien connu, une grande surprise à l'égard de la preuve relativiste offerte par la célèbre expérience de Michelson. Les dernières expériences du regretté Prof. Michelson confirmèrent les résultats obtenus, il y a un demi-siècle, par lui-même en collaboration avec Morley [1].

Il est maintenant légitime de se demander si un effet, à considérer comme appartenant au type Miller (sous réserve d'être confirmé par de moyens spéciaux d'expérimentation), pourrait se présenter au moins dans certaines régions de l'espace-temps terrestre.

La formelle circonstance banale (bien connue), qui découle immédiatement du principe des géodésiques de longueur nulle de l'espace-temps, selon laquelle un espace-temps einsteinien de type générique conduit à des anisotropies à l'égard du comportement de la vitesse de la lumière, ne nous permettait pas de connaître la possibilité

[1] Dans une Note récente (*Comptes rendus*, 7 nov. 1932, p. 769), intitulée : « C'est l'effet Esclangon (*Journal des Observateurs*, 15 avril 1928, p. 49), qui fut observé par M. Miller », M. E. CARVALLO termine en disant : « Un doute est peut-être encore permis sur ces déviations en raison de leur petitesse. Aussi doit-on souhaiter que les nouvelles mesures poursuivies par les deux savants conduisent à des résultats d'une précision suffisante pour assurer à la science la conquête définitive de la vérité ».