Vladimir Bernstein. — Leçons sur les Progrès récents de la Théorie des Séries de Dirichlet, professées au Collège de France. Préface de M. Jacques Hadamard (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Bo...

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

pouvant, au besoin, disséquer la logique elle-même. Certes on peut se demander si cette analyse de dissection ne conduira pas à quelque chose de plus subtil encore et ainsi de suite indéfiniment, mais le présent livre, forcément limité, n'aboutit pas à cette dilution dans l'indéfini. Il s'inspire essentiellement des espaces plongés en d'autres qui sont peut-être de mieux en mieux définis à mesure qu'ils sont de moins en moins vulgaires. Les espaces abstraits, de M. Fréchet, sont grandement à l'honneur. C'est notamment à M. Fréchet que l'on doit la notion d'espace *complet*, notion construite à partir d'une condition de Cauchy et qui, par suite, n'a pas été créée par une nouvelle école qui serait seule à comprendre le langage qu'elle emploie. D'ailleurs l'espace complet généralise aussi l'espace métrique.

Il va devenir fastidieux de répéter encore qu'en France tous ces travaux semblent avoir été commencés par la trinité Baire-Borel-Lebesgue. C'est surtout René Baire qui semble avoir ici un rôle de toute premier plan, la *propriété de Baire* étant analogue, en Topologie, à la mesurabilité en Analyse et pouvant s'attacher à d'innombrables généralisations.

N'essayons pas d'analyser davantage; c'est impossible. Le livre condense d'immenses travaux. Parmi les auteurs le plus fréquemment cités, outre ceux déjà nommés, mentionnons Alexandroff, Banach, Cantor, Denjoy, Hausdorff, Lavrentieff, Lindelöf, Lusin, Mazurkiewicz, Menger, Nykodym, Saks, Sierpinski (auquel l'ouvrage est dédié), Urysohn, Young. Tous ont brillamment travaillé à perfectionner l'esprit de pénétration logique.

A. Buhl (Toulouse).

Vladimir Bernstein. — **Leçons sur les Progrès récents de la Théorie des Séries de Dirichlet,** professées au Collège de France. Préface de M. Jacques Hadamard (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de XVI-320 pages. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1933.

Les séries de Dirichlet sont grandement à l'honneur et sont destinées à y être bientôt davantage encore. Sans s'éloigner des ouvrages français qui nous touchent immédiatement, il faut évidemment mentionner le fascicule de M. Valiron publié dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* et, après la présente œuvre, une autre, actuellement en préparation, qui sera rédigée par M. Hadamard lui-même. Le « petit livre » actuel, pour parler comme l'auteur, me fait déjà l'effet d'un grand ouvrage développant un Cours fait, au Collège de France, au printemps de 1931, sous les auspices de la Fondation Peccot. Cet ouvrage est écrit dans un style relativement élémentaire, très accessible aux néophytes simplement imbus de la Théorie des Fonctions selon Cauchy car l'intégration curviligne est, ici aussi, un instrument essentiel.

Rappelons qu'une série de Dirichlet est de la forme

$$f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} .$$

On peut se donner, de manière complètement indépendante, la suite des a et la suite des λ, avec l'entier n variant de 1 à l'infini positif. Il est immédiatement visible que les séries entières et, par exemple, les séries trigonométriques sont comprises dans le type indiqué. Si les séries de Dirichlet sont issues, historiquement, de recherches arithmétiques, elles participent,

très généralement, au concept de série double comme à celui de fonction sommable existant par elle-même et par l'intervention de quelque autre considération fonctionnelle. Ces aperçus, provenant tout simplement de ce que les a et les λ forment *deux* séries distinctes, pourraient être variés de bien des manières; ils font pressentir le monde prodigieux dans lequel on peut entrer avec la formule ci-dessus. Les questions de convergence, qui permettent de véritablement définir une $f(s)$, sont simples; les domaines de validité (bandes, demi-plans, secteurs, ...) sont bornés par des droites. Mais il est aussi extrêmement remarquable qu'à une $f(s)$ donnée, on puisse faire correspondre une détermination de coefficients a et λ par des méthodes qui, bien que plus complexes, rappellent le jeu des intégrales de Cauchy quant à la détermination des coefficients dans la série de Taylor. D'ailleurs, un premier critère de convergence, dû à M. Ostrowski, généralise naturellement le critère de MM. Hadamard et Fabry relatif aux séries entières.

Après ces préliminaires, on peut aborder une étude générale des λ. Il y a là des questions de *mesure* et de *densité* qui correspondent à la comparaison de λ_n avec n. De même Bohr introduit une limite logarithmique dépendant de la différence entre λ_{n+1} et λ_n.

Une série de Dirichlet peut-être *ultraconvergente*, c'est-à-dire représenter encore quelque chose hors du domaine de convergence proprement dit. On voit la différence avec les séries de Taylor qui, hors du cercle de convergence, ne représentent franchement rien, sauf conventions et constructions nouvelles. La nouvelle série

$$F(s) = \sum \varphi(\lambda_n) a_n e^{-\lambda_n s} ,$$

où φ est une fonction entière du type exponentiel, ne peut avoir de singularités sans relations remarquables et fondamentales avec celles de $f(s)$. MM. Ostrowski, Cramer, Polya ont grandement précisé et développé ce point où l'analyse est particulièrement élégante et explicite.

On peut aussi revenir à $f(s)$, en former les dérivées successives et tenter une représentation taylorienne de $f(s)$. C'est forcément étriquer les choses par quelque côté, mais c'est une méthode d'attaque qui, quoique incomplète, est extrêmement curieuse quant à une première recherche des singularités de $f(s)$. Plus loin $f(s)$ est en relation avec la fonction entière

$$C(z) = \prod \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

et toujours par l'intermédiaire du théorème de Cauchy; c'est de ce côté que l'on pourrait reprendre les aperçus arithmétiques qui donnèrent autrefois naissance à tous ces magnifiques développements. Avons-nous analysé ceux-ci ? Nullement. Tout ce que nous venons d'en dire se rapporte à peine à la première moitié du volume. Mais la seconde moitié n'est ni moins suggestive ni moins claire; il faut y relever surtout la *composition* des singularités. L'ensemble est constellé de noms de mathématiciens qui me semblent tous fort jeunes ou qui, tout au moins, ont travaillé, dans leur jeunesse, à un sujet qui, s'il exigeait beaucoup de finesse d'esprit, n'exigeait pas de très grandes connaissances préparatoires. Songeons surtout qu'il en exigera maintenant encore moins grâce à M. Vladimir Bernstein.

A. Buhl (Toulouse).