Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1933)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

P. A. M. Dirac. — **Les principes de la Mécanique quantique.** Traduction Al. Proca et J. Ullmo (Recueil des Conférences-Rapports de Documentation sur la Physique, Vol. 21). — Un volume gr. in-8° de VIII-314 pages. Prix: 95 francs. Les Presses universitaires de France, Paris, 1931.

Nous sommes en retard pour analyser ce volume si important mais cela ne nous met que plus à l'aise pour en faire l'éloge. Il a éveillé la plus grande attention. Ainsi, dans le fascicule 112 des *Actualités scientifiques* (voir analyse précédemment, page 278), Sir Arthur Eddington, traduit par M. Eugène Néculcéa, renvoie précisément à un ouvrage récent « qui va plus loin qu'aucun autre dans la structure fondamentale de l'Univers physique » et cet ouvrage n'est autre que celui de M. Dirac. D'ailleurs on parle maintenant couramment de « l'algèbre de Dirac »; ce n'est, au fond, que l'algèbre des transformations linéaires mais présentée avec une ingéniosité nouvelle et un sens physique des plus aiguisés.

Un *état* est un ensemble de variables x_i, ensemble qu'on peut se représenter comme un *vecteur*. La manière la plus simple de transformer un état en un autre c'est de transformer un vecteur en un autre par un groupe linéaire en faisant agir une *matrice* sur le premier.

Et comme une matrice peut être considérée comme un *nombre* complexe (qui s'écrit en tableau carré ou même rectangulaire) nous voyons le *nombre* devenir un agent de transformation d'état à état; c'est un premier aspect de la méthode quantique.

Les corpuscules élémentaires ont aussi des propriétés qu'on s'est souvent plu à représenter de façon paradoxale sans qu'elles le soient plus que certaines singularités de continuité attachées à des équations différentielles très simples. Ainsi les trajectoires isométriques $ds = ad\theta$ sont des cercles C tels qu'il en passe deux par tout point intérieur au cercle $r = a$; je puis former une courbe continue mais sans tangentes en prenant des successions de ds non situés sur un même C. Toutes les fois que θ varie de $d\theta$, j'ai le choix entre deux chemins C. Où irais-je dans ces conditions ? Voilà ce que le commencement d'un parcours ne décide point; voilà où l'analytique cède la place au non analytique et où le déterminisme perd du terrain. L'alternative, l'incertitude subsisteront dans des régions de plus en plus petites et c'est ainsi, par exemple, qu'un photon peut être, à la fois, dans deux états de polarisation ou être prêt à interférer avec lui-même.

Les *quantités observables* ou, plus simplement, les *observables* sont tout naturellement les matrices ci-dessus indiquées; au fond des choses il ne saurait y avoir rien d'autre qui soit observable, les transformations seules nous étant accessibles. Quant à l'idée de *temps*, si l'on entend par là le temps paramétrique t d'origine astronomique, son insuffisance éclate de

bien des manières; s'il s'introduit encore, ce sera surtout dans des équations aux dérivées partielles et quant à des propriétés intégrales de celles-ci invariantes par rapport à t. Il n'est plus le souverain maître, l'important étant ce qui lui échappe.

L'analyse quantique étant essentiellement intégrale doit contenir, à ce point de vue, des représentations fonctionnelles; c'est ici qu'intervient la fameuse fonction $\delta(x)$ toujours nulle lorsque x diffère de zéro et donnant cependant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1 .$$

L'auteur s'en sert en véritable acrobate et sans que rien semble s'opposer aux conclusions qu'il en tire. Il resterait toutefois, sur ce point, à recourir à des raisonnements plus rigoureux existant déjà chez les créateurs de la Théorie des fonctions de variables réelles.

La théorie des transformations (Ch. VI) est encore une merveille de symétrie intégrale.

Les équations du mouvement sont bâties à partir des crochets de Poisson ce qui n'empêche pas que la forme de Schrödinger est rapidement retrouvée en accord avec la notion de transformation du chapitre VI; on redescend ensuite aux représentations de Heisenberg indépendantes du temps. Les applications élémentaires ont trait à la particule libre, aux paquets d'onde, à la vitesse de groupe égale à la vitesse de la particule (L. de Broglie), aux oscillateurs harmoniques, à une et à deux dimensions, au « spin » de l'électron, aux mouvements dans un champ central. On sait que l'atome d'hydrogène se prête à une belle et simple analyse qui ne diffère pas essentiellement de celle de Bohr; ce ne sont que les représentations géométriques de Bohr qui étaient superflues.

La théorie des perturbations est également illustrée par l'effet Zeeman anomal.

Les problèmes de collision sont surtout ramenés à l'action *diffusante* d'un système atomique sur une particule qui vient de l'infini et y retourne; la question a indéniablement un aspect temporel et cependant, la particule passant infiniment plus de temps à l'infini qu'à distance finie, on peut ramener un tel cas à des considérations stationnaires; l'approximation est, tout au moins, des plus ingénieuses.

Les systèmes qui contiennent plusieurs particules semblables relèvent de la théorie des permutations, celles-ci pouvant être considérées comme des observables car toute permutation est immédiatement matricielle. La théorie du rayonnement, plus précisément celle des ensembles d'Einstein-Bose revient à l'interaction de la lumière et d'un système atomique; c'est la généralisation de l'action diffusante indiquée il y a un instant.

Le dernier chapitre traite de la théorie relativiste de l'électron. C'est peut-être à ce cas que l'on pense le plus quand on entend parler, sans préciser davantage, des « équations de Dirac ».

Depuis la publication du livre, de très importants développements ont été publiés, sur cette question, notamment par M. De Donder et Mlle Yvonne Dupont (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1932-33) ainsi que par M. Tullio Levi-Civita (*Bull. of the Amer. Math. Society*, August, 1933. *Sitzungsberichte*

der Pr. Akademie, 1933. V). Ces seules citations montrent que le livre de M. Dirac était appelé à un retentissement à coup sûr bien mérité. Nul doute qu'il n'engendre encore bien d'autres travaux des plus utiles et des plus profonds. Il est terminé par une Note, de M. Al. Proca, sur « Les crochets de Poisson en Mécanique classique ». Que ceci soit l'occasion de féliciter aussi les traducteurs.

A. Buhl (Toulouse).

Actualités scientifiques. — Fascicules gr. in-8°, avec figures et planches, se vendant séparément à prix divers. Hermann et Cie, Paris.

Ces fascicules sont simplement analysés dans l'ordre où nous les recevons. Les lacunes, évidentes d'après le numérotage, sont dues, au moins partiellement, à des retards imputables à certains auteurs. Elles n'entraînent pas de véritables discontinuités d'exposition, les sujets étant généralement indépendants et débattus suivant les exigences de l'actualité.

62. — Mme Pierre Curie. *Les rayons α, β, γ des corps radioactifs en relation avec la structure nucléaire* (Radioactivité et Physique nucléaire. Direction de Mme Pierre Curie. 40 pages, 1933. Prix: 12 francs). — Un rayon α est un atome d'hélium doublement ionisé. Un rayon β est un électron. Un rayon γ est de nature électromagnétique. En poursuivant l'étude de ces rayons, notamment avec des considérations de structure fine, on peut arriver à des considérations de structure nucléaire qui sont celles de la théorie de Gamow (voir *Ens. math.*, 1932, p. 137). Tout, dans ce facicule, est d'un prodigieux intérêt; signalons cependant les spectres corpusculaires obtenus par effet photoélectrique des rayons γ sur des atomes étrangers. A un quantum énergétique peut correspondre un rayon corpusculaire. Un groupe de rayons γ peut donner naissance à des photoélectrons.

Il y a des rayons qu'on n'attribue pas précisément à des substances émettrices mais à des transformations. Mme Curie, dans ce fascicule, ne fait pas beaucoup de mathématiques mais il me semble que tout cet admirable exposé pourrait être aisément accordé avec l'analyse matricielle; le phénomène saisissable est essentiellement transformation et l'instrument le plus simple de la transformation est la matrice. C'est d'ailleurs avec ces idées analytiques qu'on pourrait aller, toujours mathématiquement, vers la théorie de Gamow.

Ces lignes étaient écrites quand parvint, le 4 juillet 1934, la nouvelle de la mort de Mme Pierre Curie, en Haute-Savoie, dans un sanatorium voisin de Sallanches.

Faut-il encore insister sur l'importance d'une œuvre qui aboutit à des considérations relatives à la structure de l'atome, œuvre qui appartient à la Physique, à la Chimie avec les plus importantes répercussions médicales et qui finit par intéresser aussi les Principes de la Géométrie. Si l'on pouvait prouver qu'il existe, dans l'atome, des orbites elliptiques *semblables* aux orbites planétaires ce serait un argument puissant en faveur du caractère euclidien de l'espace physique, caractère qui semble de moins en moins probable. Mais peu importe, en ce moment, la discussion de ce sujet. Ce qu'il faut souligner, ce sont les immenses répercussions, à des points de vue entièrement différents, de la Physique intra-atomique. Que de formes de gloire s'attachent au nom de Curie !

65. — A. Magnan et A. Planiol. *Sur l'excédent de puissance des oiseaux* (Morphologie dynamique. Direction A. Magnan. 26 pages, 1933. Prix: 8 francs). — Question amorcée par Navier mais sans résultats valables. Elle est encore fort difficile aujourd'hui et cependant les auteurs nous donnent une expression du travail élémentaire fourni par l'oiseau pendant le temps *dt* puis d'admirables études expérimentales au frein de Prony très perfectionné; l'animal y est relié par un fil dont le déroulement doit être habilement surveillé. Il y a, *pendant* le vol de l'oiseau, un énorme excédent de puissance qui toutefois n'est pas superflu *à l'envol.*

66. — A. Magnan et A. Planiol. *Sur l'excédent de puissance des insectes* (Morphologie dynamique. Direction A. Magnan. 26 pages, 1933. Prix: 8 francs). — Etude analogue à la précédente mais plus délicate encore. Dans ce domaine minuscule, il a fallu renoncer au frein de Prony. On peut remarquer que ceci s'imposait de par la nature du frottement dont les lois (?) varient à des échelles différentes. Qui sait si de tels travaux n'éclairent pas ces lois.

De ces délicates recherches il semble résulter que les insectes sont, toutes proportions gardées, moins puissants que les oiseaux et d'ailleurs beaucoup plus rebelles à l'expérimentation.

71. — L. Brillouin. *La Méthode du champ self-consistent* (Théorie des Quanta. Direction Léon Brillouin. 48 pages, 1933. Prix: 12 francs). — Il s'agit d'une méthode d'approximation employée par Dirac de manière non absolument explicite. Il faudrait d'abord repérer les électrons, chose qui semble extrêmement difficile, étant donnée leur identité, mais qui laisse alors naturellement place aux substitutions de la théorie des groupes. Cela peut conduire, avec Schrödinger, aux fameuses intégrales d'échange dans l'espace à $3n$ dimensions.

Jordan et Dirac prennent les ondes dans l'espace ordinaire avec *double quantification ;* les électrons sont toujours sans individualité mais peut-être sont-ils plus intuitivement portés par les ondes. Au fond, il s'agit toujours de perturbations justiciables de constructions matricielles dans lesquelles on cherchera, au moins de manière approchée, à établir une symétrie analogue à la symétrie diagonale pure. M. Léon Brillouin étudie une méthode de résolution valable pour de grosses perturbations, c'est-à-dire pour des éléments non diagonaux assez grands. Quant à la méthode du champ self-consistent de Hartree, c'est une méthode de répartition moyenne des électrons sur leurs ondes, méthode simpliste au premier abord mais qui a l'avantage d'admettre des approximations complémentaires.

L'exposition, où les éléments matriciels ont généralement la forme intégrale de Dirac $(a|H|a')$ évolue ensuite vers les symétries groupales géométriques telles qu'elles sont étudiées dans Cartan *(Géom. project. complexe)* et dans Wiguer *(Gruppentheorie und Anwendung auf die Quantenmechanik)*. Ces deux beaux ouvrages ont été analysés ici (1931, pp. 301 et 164). Signalons aussi que le présent fascicule 71 est préparé par le fascicule 39 de M. Léon Brillouin. Certes ce n'est pas encore de la science habituelle (cela viendra) mais c'est court, sans développement rigoriste encombrant; cela demande le minimum d'effort pour pénétrer dans le temple étrange et merveilleux de la Mécanique quantique.

74. — P. Swings. *Spectres moléculaires. Etude des molécules diatomiques* (Physique moléculaire. Direction Victor Henri. 52 pages. 1933. Prix: 14 francs). — Le sujet n'est pas éloigné du précédent. Il débute par les interactions de la rotation moléculaire et du mouvement électronique. La molécule comprend un corps et un électron optique. Pour exposer les interactions, il y a avantage à employer le langage vectoriel.

Evidemment ! Et, comme les transformations vectorielles sont matricielles, nous pouvons retrouver ici l'arsenal habituel de la Mécanique ondulatoire. Toutefois, M. Swings n'abuse pas de cet arsenal et n'écrit que peu de formules purement mathématiques.

En revanche il nous donne de nombreux schêmes géométriques et invoque, avec élégance, symétries et rotations dans l'esprit de la Théorie des Groupes. Il fallait un chimiste, un expérimentateur pour écrire ces pages. D'un géomètre, certains chimistes auraient dit, peut-être encore de nos jours, qu'il se livrait à une débauche de considérations théoriques plutôt néfastes. Mais ici, bien que je n'aie pas l'honneur de connaître M. Swings, il me semble reconnaître le labeur (très grand) de l'homme de laboratoire. C'est avec observations à l'appui qu'il nous présente différents spins, l'oscillateur linéaire, la combinaison de la vibration et du saut électronique. Les spectres de bandes, complexes en général, aboutissent à la division en bandes de rotation pure et bandes de rotation-vibration. Aux niveaux électroniques inférieurs, nous trouvons le *spectre de fluorescence*.

77. — Lucien Godeaux. *Questions non résolues de Géométrie algébrique* (Analyse mathématique. Direction J. Hadamard. 24 pages. 1933. Prix: 8 francs). — Fascicule éminemment utile puisqu'il indique des sujets d'étude dont quelques courageux néophytes vont certainement profiter. La Géométrie algébrique consiste dans l'étude des propriétés de variétés algébriques qui ne sont pas altérées par les transformations birationnelles de ces variétés. Mais ici le mot « variété » est d'une généralité qui contient, selon les points de vue, les pires embûches ou les plus puissants attraits; tout dépend du nombre des dimensions et que de changements, que de difficultés nouvelles quand ce nombre augmente d'une unité. Les questions non résolues, sur lesquelles insiste M. Godeaux, ne sont qu'au nombre de deux: Involutions de l'espace et variétés algébriques à trois dimensions dans l'espace à quatre. Il convient de revenir aux travaux de M. Emile Picard, de Paul Appell et de M. Ed. Goursat. Nouvelle raison d'attribuer de l'importance aux fonctions algébriques reprises par M. Bliss dans un ouvrage signalé plus loin. Quant aux involutions, il faut les revoir au travers des travaux de l'Ecole italienne, notamment de ceux de F. Enriques.

Une Bibliographie des plus étendues termine cette importante incitation à la recherche.

96. — V.-A. Kostitzin. *Symbiose, Parasitisme et Evolution* (Biométrie et Statistique biologique. Direction Georges Teissier. 48 pages. 1934. Prix: 15 francs). — Etude très mathématique de phénomènes biologiques. Ceci s'ajoute évidemment aux *Leçons sur la théorie mathématique de la Lutte pour la Vie* de M. Vito Volterra (Voir *Ens. math.*, 1931, p. 158) mais les problèmes ne sont pas les mêmes et entraînent des systèmes d'équations différentielles notablement différents. Voilà qui paraît d'ailleurs plutôt heureux et montre que la première tentative n'était pas une initiative

singulière et sans lendemain. La biologie mathématique a un avenir certain mais, en parcourant les pages de M. Kostitzin, on pressent que cet avenir sera très différent de celui qui pourrait procéder d'une adaptation à la biologie de quelque théorie déjà faite, de quelque théorie mécanique par exemple. Ainsi, il y a une très grande différence entre la stabilité mécanique, toujours discutable, et la stabilité biologique qui ne l'est guère. La Nature n'a pas, en général, d'essais à insuccès; tout ce qui naît a des raisons de vivre sinon individuellement du moins statistiquement.

Malgré la nouveauté de bien des points de vue, il subsiste cependant que les croissances exponentielles sont toujours fondamentales mais il faut les accommoder avec des systèmes différentiels qui contiennent au moins les variables sous forme quadratique.

Au total, les idées sont profondes et méritent de réussir. Ainsi il y a création non seulement d'une vie mathématique mais de milieux mathématiques propres à cette vie. Et ces milieux sont des sortes d'espaces-temps qui, même artificiels, relèvent d'une grande ingéniosité.

A. Buhl (Toulouse).

Waclaw Sierpinski. — **Hypothèse du Continu** (Monografje Matematyczne, tome IV). — Un volume gr. in-8° de vi-192 pages. Prix: 3,50 dollars U.S.A. Varsovie-Lwów, 1934. Pour l'achat voir plus haut, p. 269.

La collection polonaise de Monographies mathématiques dont nous avons annoncé la naissance (voir ce volume, p. 269), se continue de façon magnifique mais, malheureusement pour le critique, dans un style qui défie toute description brève. Ce sont précisément les notions usuelles, à images simples prêtant aisément aux comparaisons, qui sont, à bon droit d'ailleurs, jugées imparfaites et reprises sur une trame logique qui ne peut souvent, elle-même, apparaître comme impeccable mais qui représente, tout de même, l'effort de la pensée vers la création et la construction plutôt que l'asservissement à de simples intuitions.

« On ne connaît aucun ensemble individuel de nombres réels dont on sache qu'il n'est ni fini, ni dénombrable, ni de puissance du continu. Cependant, malgré tous les efforts, on ne sait pas démontrer que ces cas doivent se présenter toujours ». Il y a donc là une généralité, non démontrée jusqu'ici, qui ne peut vraiment exister que comme *hypothèse*. Et cette hypothèse date d'ailleurs de l'illustre Cantor. Elle a été retravaillée par David Hilbert avec les *alephs*, parmi lesquels on pourrait peut-être assigner la puissance du continu. Mais ne sent-on pas encore là quelque chose d'hypothétique ? Vraiment c'est le domaine des difficultés initiales où il se peut que les symboles mathématiques, même en caractères hébraïques, n'aient pas plus de précision que l'électron n'a de forme. Qui sait si ce n'est pas un tort de l'esprit que de croire au « fondamental » qu'un travail acharné doit enfin nous livrer ?

Cependant le travail n'est jamais inutile; il est ici la source de résultats et de correspondances curieuses. « L'espace à trois dimensions est une somme d'une infinité dénombrable de courbes ». De tels énoncés sont particulièrement vraisemblables et éveillent d'abord une idée de simplicité. Qui sait encore si la science de l'avenir n'abandonnera pas définitivement le *vrai* pour se cantonner dans les notions d'enchaînements simples. Ce

n'est pas la première fois que j'écris de telles choses, en cette même place, mais vraiment l'ouvrage si profond de M. Sierpinski m'y ramène non sans m'apparaître comme une source de prodigieuses réflexions.

L'hypothèse fondamentale a été variée, par M. N. Lusin, au moyen de la notion d'ensemble *linéaire*. Ceci me fait encore penser aux *groupes*, généralement très complexes mais toujours susceptibles de représentations linéaires.

« Il y a des ensembles de nombres réels sur lesquels il existe des fonctions de Baire des classes 0, 1, 2 mais sur lesquels il n'existe aucune fonction de Baire de classe 3. » Curieuse définition d'ensembles par des propriétés fonctionnelles y attachées. Il y a ici quelque chose comme une inversion de la fonction d'ensemble.

Des propriétés d'ensemble peuvent être *héréditaires*, comme appartenant à tout sous-ensemble. La fonction de Baire (représentable analytiquement) et la fonction satisfaisant à la condition de Baire (continuité sur ensemble parfait) jouent un rôle continuel dans des travaux d'approche qui sont des modèles de patience et d'art logique.

Plus loin, heureusement, la Géométrie apparaît même dans le voisinage des alephs; il est question (p. 103) d'une infinité dénombrable d'arcs qui, par translations et rotations peuvent couvrir tout le plan.

Je m'arrête. Comment mieux faire ? Le mérite de l'ouvrage est grand comme œuvre de condensation. Il réunit très heureusement les points essentiels d'immenses travaux dus notamment à Banach, Braun, Eilenberg, Fréchet, Hausdorff, Hurewicz, Kuratowski, Lebesgue, Lindenbaum, Lusin, Mazurkiewicz, Szpilrajn, Tarski, Ulam, Zermelo. Il faut aimer le sujet et avoir le livre en mains pour bien comprendre tout ce que l'on doit à M. Sierpinski.

A. Buhl (Toulouse).

N. M. Gunther. — **La Théorie du Potentiel et ses Applications aux Problèmes fondamentaux de la Physique mathématique** (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de 304 pages. Prix: 70 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1934.

Encore un ouvrage qui tente de préciser, de manière de plus en plus délicate, des conditions d'existence et de résolution auxquelles, au simple aspect, on n'est pas porté à songer.

Il faut reconnaître maintenant qu'on n'introduit pas, en Physique mathématique, des surfaces, des volumes, des étendues avec les bonnes vieilles vues intuitives qui s'attachaient autrefois à ces mots. Il y a là des notions intégrales qui ont été l'objet de reconstructions à peu près totales, ce dont la Physique théorique profite sans cesse; la Physique mathématique doit tout naturellement emboîter le pas.

L'ouvrage débute par les trois conditions de Liapounoff s'appliquant à des surfaces limites de domaines; dans les cas les plus simples, ces conditions sont réalisées d'elles-mêmes et il semble fort inutile d'en parler, mais elles permettent d'aborder de façon claire des énoncés dont les conséquences, avec les méthodes d'autrefois, persistaient à ne pas paraître absolument

maniables. Tout ceci n'empêche point l'élégance des formules, comme on peut s'en convaincre avec le théorème de Hugoniot-Hadamard (p. 10). Les formules de Green et de Stokes, l'intégrale de Gauss s'accommodent également fort bien des nouveaux principes.

D'ailleurs, dans la Théorie du potentiel, nous retrouvons les discontinuités fondamentales qui, avec un léger esprit d'extension, vont préparer celles de la théorie des ondes. Et ceci est si vrai que le Problème de Neumann (Ch. III) est traité avant celui de Dirichlet (Ch. IV); c'est le premier qui actuellement est générateur de bien des considérations ondulatoires.

Les domaines à faces planes facilitent de beaucoup certaines discussions où interviennent maintenant des équations intégrales; d'ailleurs, à y regarder de près, c'est cette domination des notions intégrales qui permet toutes précisions et tout véritable progrès. Enfin, bien qu'il soit délicat de se prononcer sur ce point, il semble que M. Gunther nous révèle, dans le Problème de Neumann, une plasticité supérieure à celle du problème de Dirichlet. Au premier se rattache aisément le Problème de Robin; de simples singularités polaires établissent le lien. Le problème de Dirichlet est plus tendu; ses diverses modalités, intérieures et extérieures, reposent sur des considérations singulières moins extensibles, du moins au premier abord. Il a cependant le beau rôle de conduire aux fonctions de Green qui n'ont nullement été dépouillées de leur élégance d'autrefois et, après lesquelles, la fonction de Neumann permet de reprendre le Problème de cet auteur. Si je ne me trompe, il y a bien, dans l'ouvrage, une sorte de point de vue dualistique d'où l'on compare, tour à tour, deux problèmes fondamentaux à la clarté de méthodes qui, plusieurs fois, semblent faire passer le maximum d'intérêt de l'un à l'autre. Finalement, les ondes, la propagation de la chaleur sont justiciables autant des fonctions de Green que de celles de Neumann. Et tout potentiel newtonien, sous des conditions de continuité extrêmement générales, est développable à l'aide de fonctions *universelles* étudiées par M. A. Korn.

Un Appendice revient sur d'épineux théorèmes qui furent travaillés non seulement par Liapounoff mais aussi par Stekloff dans une « Théorie générale des fonctions fondamentales » publiée aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. Nos *Annales*, vers le commencement du siècle, furent riches, en effet, en exposés de ce genre. Raison de plus pour nous féliciter de leur fécondité, celle-ci étant mieux qu'établie dans le livre subtil et profond dû à M. Gunther.

A. Buhl (Toulouse).

Gilbert Ames Bliss. — **Algebraic Functions** (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XVI). — Un vol. gr. in-8° de x-218 pages. Prix $ 3.00. Published by the American Mathematical Society. New-York. 1933.

Ouvrage clair et concis que l'on parcourt avec aisance quand on connaît déjà le sujet et qui est également très à recommander aux néophytes. Comme je suis parmi les avertis, je puis dire que ce qui m'a le plus frappé, de ce point de vue, est le terrain perdu par le calcul qui, à vrai dire, n'a jamais été bien développé mais que certains auteurs ont parfois provoqué

justement pour ne point paraître exposer un sujet trop abstrait. En France, grâce à Paul Appell et à M. Edouard Goursat, grâce à M. Emile Picard, nous sommes riches depuis longtemps mais les ouvrages de ces grands savants ont été développés, par Fatou puis par M. Picard lui-même, dans les *Cahiers Julia*. Ici il semble que l'auteur ait surtout recherché le maximum de concision et qu'il l'ait véritablement obtenu.

Le plan de l'ouvrage, en cette matière, ne peut différer beaucoup d'un livre à l'autre. C'est d'abord le chapitre préliminaire relatif à l'uniformité sur un plan simple; il contient une remarquable démonstration du théorème de Cauchy sur contours rectangulaires décroissants.

Avec les fonctions algébriques quelconques, c'est tout de suite la surface de Riemann. Faut-il rappeler que cette admirable conception ne fut pas toujours comprise des successeurs de Riemann. Maintenant le triomphe est absolu; on ne sent même pas le besoin de chercher autre chose.

La simple logique indique d'étudier d'abord les fonctions rationnelles sur la surface; elles interviendront plus loin quant à la construction de l'élément différentiel des intégrales abéliennes mais elles ont bien leur intérêt propre. Ici peut apparaître la définition du *genre* et bientôt le célèbre théorème de Riemann-Roch *(a famous one)*. Considéré en lui-même, ce théorème ne semble avoir qu'un caractère énumératif limité; il restreint, il interdit certaines combinaisons d'ordres. Au fond il ordonne et géométrise. C'est parfaitement beau.

Vient ensuite la question de la connexion des surfaces de Riemann; quelle belle carrière encore, pour l'esprit d'ingéniosité, que la recherche des coupures rendant la surface simplement connexe. Cela a l'air de vivre et certaines figures rappellent des dessins biologiques avec fibres, canaux, agglomération de cellules. Cette impression s'accentue encore avec les intégrales de fonctions rationnelles et l'apparition des périodes.

Puis c'est le célèbre théorème d'Abel suivi d'applications élémentaires avant d'être définitivement établi dans toute sa généralité.

Une transformation birationnelle met en correspondance deux courbes algébriques alors qu'une transformation de Cremona se rapporte aux surfaces riemanniennes; ce n'est pas toujours équivalent, comme on le voit sur des exemples très simples. Ceci me remet en mémoire une opinion émise jadis par Paul Appell. Il ne conseillait pas une étude outrancière et isolée des courbes algébriques à un point de vue purement géométrique; pour bien comprendre la nature des choses, il fallait la surface de Riemann et les intégrales abéliennes attachées à la courbe. M. Bliss réalise à merveille ce programme. La réduction des singularités et finalement le problème de l'inversion sont suivis d'exemples dont le choix, en général, n'est pas aisé.

Mais les intégrales elliptiques et hyperelliptiques sont mises à contribution aussi bien que possible.

Les emprunts que l'auteur a faits aux œuvres du passé sont éclectiques. Ils commencent avec Abel et Riemann et n'oublient pas les illustres Français cités plus haut. Ils aiguillent aussi le lecteur vers des développements historiques tel le rapport de Hancock à la *British Association* (Toronto, 1897).

Les écoles italienne et anglaise voisinent aisément avec l'école allemande si bien qu'en un volume, en somme, fort mince, la théorie des fonctions algébriques se trouve actuellement mise au point avec un rare bonheur.

A. Buhl (Toulouse).

H. Dulac. — **Curvas definidas por une ecuacion diferencial de primer order y de primer grado.** — Un volume gr. in-8° de 180 pages. Prix: 6 pesetas. Junta para ampliacion de Estudios. Seccion de publicationes, Duque de Medinaceli 4. Madrid, 1933.

Cet élégant ouvrage provient de Leçons professées à Madrid en l'année scolaire 1931-32. Les livres facilement accessibles qui traitent du sujet sont le *Traité d'Analyse* de M. Emile Picard (particulièrement t. III) et le tome premier des *Œuvres* de Poincaré. Mais M. Dulac s'est révélé promptement d'une grande originalité en la matière et son exposition d'ensemble sera certainement appréciée partout comme elle a pu l'être par des auditeurs espagnols.

L'exposition est consacrée à l'étude qualitative des courbes intégrales ou solutions de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \quad \text{d'où} \quad dx = X(x, y)\,dt\,, \quad dy = Y(x, y)\,dt\,.$$

Elle a pour but de donner des moyens aussi simples que possible pour déterminer la forme approximative de ces solutions. L'emploi de la représentation paramétrique des courbes solutions, au moyen de la variable t, a permis à Bendixson de compléter les résultats dus à Poincaré et d'en donner des démonstrations simples. Après le rappel des théorèmes relatifs à la forme des solutions, les conséquences qui en résultent pour la disposition de ces solutions, dans le voisinage d'un point singulier, sont mises en évidence. On suppose seulement d'abord que $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ satisfont aux conditions de Lipschitz. Certains des résultats sont précisés dans le cas où X et Y sont holomorphes pour les points considérés.

Le rôle que jouent certaines solutions appelées *séparatrices* est signalé. Ces courbes et les solutions fermées divisent le plan en régions telles que les solutions d'une région présentent toutes la même disposition.

Dans le chapitre relatif au cas où X et Y, holomorphes et nuls pour $x = 0, y = 0$ contiennent des termes du premier degré, les règles simples qui permettent de distinguer les cas du nœud, du col ou du foyer sont établies d'une façon élémentaire.

Le cas où l'on peut avoir soit un foyer, soit un centre est particulièrement examiné, ainsi que celui où une seule des expressions X ou Y contient des termes du premier degré, l'autre ne contenant que des termes de degré supérieur.

Les branches infinies des solutions ont été étudiées dans un chapitre spécial, en raison de leur importance dans la détermination de la forme d'une courbe.

Dans un dernier chapitre, sont exposées les méthodes qui permettent de déterminer, dans les cas plus compliqués, la disposition des solutions au voisinage d'un point singulier. Par ces méthodes on obtient, au moyen de changements successifs de variables, des équations différentielles mettant en évidence chacune un groupe de solutions aboutissant à un point singulier. L'auteur montre comment doit être complétée la méthode de Briot et Bouquet, pour que celle-ci fournisse, dans le champ réel, comme la méthode

de Bendixson, toutes les solutions cherchées. Il résulte de cette discussion des indications sur l'avantage que la méthode de Briot et Bouquet présente dans certains cas.

Il y a là des comparaisons très intéressantes entre les méthodes de l'âge héroïque de la théorie et les méthodes modernes pour lesquelles nous devons beaucoup à M. Dulac lui-même.

A. Buhl (Toulouse).

Václav Hlavatý. — **Les Courbes de la Variété générale à n dimensions** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LXIII). — Un fascicule gr. in-8° de 74 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1934.

Ce fascicule sera particulièrement bienvenu. A ceux qui ne connaîtraient pas l'auteur, je puis présenter celui-ci comme un jeune homme extrêmement aimable, semblant parler, dans les Congrès, à peu près toutes les langues, érudit de premier ordre dans les sujets dont il s'occupe et d'ailleurs brillant Professeur à l'Université Charles de Prague. Une extrême facilité d'assimilation et de généralisation lui a été presque nuisible. Comment étudier Hlavatý ? Il a tant de symboles à lui, de notations nouvelles, d'idées ultra-générales où les définitions sont par trop sommaires. Maintenant toutes ces craintes tombent. Le savant géomètre vient de réaliser un exposé méthodique des plus clairs où le Calcul différentiel absolu se manifeste en sa plus belle forme géométrique.

Notons d'abord qu'un *affineur* est distingué d'un tenseur; l'affineur est plus général, le tenseur ne venant qu'ensuite avec certaines symétries d'indices. Déjà ici le Calcul dit parfois « tensoriel » peut prêter à des confusions, la dérivation covariante appartenant aux affineurs. La courbure dépend, de même, d'un affineur. L'espace n fois étendu est doué d'une connexion métrique avec torsion, le ds^2 ayant la définition riemannienne habituelle, si bien que là où l'on nous parle modestement de « courbes » il y a, en réalité, un procédé d'analyse absolument complet pour l'espace polydimensionnel incurvé et tordu. Il y a des développements tayloriens en s qui, dans des circonstances très générales, conservent une structure euclidienne, ceci grâce à la notion de *verseur* également favorable à un maintien quasi-intuitif des formules de Frenet. Les notions géodésiques sont précédées par l'auto-parallélisme. Il y a aussi une curieuse déformation infinitésimale qui revient à la considération de coordonnées *troublées* par des termes additifs à coefficient ε. L'espace se trouble à la manière des systèmes mécaniques ou physiques probablement parce qu'au fond, il n'en diffère pas. Le rayon de lumière est auto-parallèle. Ainsi tout le symbolisme employé, malgré son aspect parfois ardu, est extrêmement proche des réalités.

La bibliographie est très riche; j'y reléve Berwald, Blaschke, Bompiani, Bortolotti, Cartan, De Donder, Gambier, Godeaux, Juvet, Levi-Civita, Mc Connell, Schouten, Veblen, Weyl, sans oublier le sympathique auteur d'une si remarquable mise au point.

A. Buhl (Toulouse).

Marcel Boll. — **Pour connaitre... La Relativité, l'Analogie, l'Inertie, la Gravitation, le Choc, l'Incandescence, la Luminescence, la Fréquence.** — Un volume in-8° de 180 pages et 145 gravures. Prix: 15 francs. Larousse, Paris, 1934.

M. Marcel Boll fait de la vulgarisation de toutes sortes. Nous avons signalé ici (1932, p. 290) son *Idée générale de la Mécanique ondulatoire* en laquelle il imite ingénieusement les propriétés de l'équation de Schrödinger en partant de celle des cordes vibrantes.

Et cette ingéniosité suffit à faire reconnaître le mathématicien averti. Celui-ci écrit maintenant, sans mathématiques, un ouvrage des plus remarquables. Il débute par les Analogies et donne, sans formules, des exemples physiques de relations linéaires, quadratiques, exponentielles; des tableaux et des figures suffisent amplement à la compréhension.

Puis, tout de suite, le monde est ondulatoire et corpusculaire. L'étude de l'inertie et de la gravitation conclut à l'identité des deux choses. La théorie d'Einstein n'est plus sérieusement contestée par personne (p. 43).

La masse est maupertuisienne (intervention du choc), transversale, longitudinale, cinétique, pesante, chimique et nous avons un tableau de masses allant de celle de l'électron à celle de l'Univers entier. Les forces de cohésion sont de nature électrique; la distribution des atomes dans le fer, le cuivre, le zinc, ... est d'une géométrie qu'on admire d'un coup d'œil.

On va de la torche préhistorique à l'ampoule électrique; les enseignes lumineuses sont les tubes à gaz rares et raréfiés sortis des laboratoires pour se montrer à tous dans la rue. La luminescence du sulfure de zinc bombardé par le radium permet le spinthariscope ou appareil à voir le bombardement. L'effet Raman est la réémission d'un rayonnement simple (vert, par exemple) sur l'influence d'un rayonnement simple (bleu). L'astrophysique nous ramène à Einstein avec la déflexion de la lumière.

La fréquence va des ondes élastiques aux rayons cosmiques. Elle conduit aussi aux quanta et aux ondes de matière.

Jolies esquisses utiles à tous, même à ceux qui savent; les jeunes mathématiciens, non encore initiés aux théories actuelles, pourront en prendre comme un avant-goût philosophique dans le livre de M. Boll. Cela leur donnera certainement l'envie d'examiner comment ce livre pourrait être mis en formules.

A. Buhl (Toulouse).

Th. Caronnet. — **Exercices de Trigonométrie.** — Un volume in-16° (19 × 12) de 308 pages. Prix: 15 francs. Vuibert, Paris, 1934.

Excellents exercices élémentaires qui ne démentiront pas le talent pédagogique bien connu de M. Caronnet. C'est varié, toutes les formules sont de construction élégante, il y a des équations et des inéquations ainsi que d'intéressantes courbes tracées avec l'aide des dérivées. Ces sujets sont au nombre de 350. Beaucoup sont constitués par d'ingénieuses résolutions de triangles.

Justement parce que l'aspect général est élégant et a été élaboré par un bon professeur, ceux qui savent pourront ici trouver matière à des travaux qui se placeraient bien au-dessus de la trigonométrie classique. Ainsi nombre d'identités trigonométriques sont des relations fonctionnelles dont la trigonométrie ne donne que des solutions particulières. Et si l'on voulait en déterminer la solution la plus générale ? J'imagine que, tout au moins dans certains cas, cela pourrait conduire loin. Page 12, je trouve l'identité à vérifier

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cotang}^2 x \cos^2 x = \operatorname{cotang}^2 x - \cos^2 x \,.$$

C'est immédiat. N'est-il pas indiqué, après cela, de rechercher toutes les fonctions, u et v, telles que

$$\text{(2)} \qquad u^2 v^2 = u^2 - v^2 \,.$$

C'est encore fort simple mais ce sont les extensions de ce genre qui pourraient conduire à nombre de développements inattendus. Et j'imagine encore qu'il y a d'excellents mathématiciens qui pourraient rencontrer l'équation (2) et n'apercevoir la solution particulière (1) qu'après quelques détours.

Si l'on voulait paraître un peu plus savant, on citerait l'équation fonctionnelle

$$F(x)\,F(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

qui admet la solution trigonométrique

$$F = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{coséc} \frac{\pi x}{2}$$

et la solution transcendante $F = \Gamma(x)$. Nous voilà loin des *Exercices* de M. Caronnet mais je ne crois pas que leur auteur puisse m'en vouloir pour ces digressions inspirées par son équation (1) et conformes à l'esprit kleinéen qui recommande de voir de haut les mathématiques élémentaires. Encore une fois, je n'écris pas cet article pour les élèves mais plutôt pour leurs maîtres. Je prétends que ces derniers pourront trouver, dans ce joli recueil de problèmes, des sujets de réflexion aussi intéressants que divers.

A. Buhl (Toulouse).

Edmund Landau. — **Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung.**— Un vol. in-8° de 368 pages; broché RM. 20; relié, RM. 22.50; P. Noordhoff, Groningen, 1934.

Dans cette « Introduction au Calcul différentiel et intégral » M. Landau a reproduit la substance du cours d'analyse, remanié à nouveau, qu'il professe régulièrement depuis plus de trente ans, à côté d'autres cours déjà

résumés en partie dans des ouvrages devenus classiques et dont l'éloge n'est plus à faire.

Le nouveau livre de M. Landau s'adresse à des débutants, aussi l'auteur a-t-il eu soin de n'établir que des propositions qui constituent la base du calcul infinitésimal et, en les groupant de la manière la plus naturelle et didactiquement la plus simple, de mettre en évidence les définitions et les propriétés qui servent de « ciment » et que parfois on passe sous silence. C'est le souci constant de tout justifier, de ne sauter aucun raisonnement, si insignifiant soit-il, qui explique la quantité énorme de définitions et de théorèmes soigneusement numérotés: le volume en contient plusieurs centaines. Mais a-t-on jamais compté le nombre des théorèmes établis ou simplement énoncés dans les traités classiques ?

Le livre de M. Landau contient deux parties de longueur inégale: les principes et les règles du calcul différentiel font l'objet de la première; dans la seconde, beaucoup plus courte, l'auteur expose les éléments du calcul intégral. Les applications à la géométrie sont laissées de côté, bien que M. Landau les traite longuement dans ses cours, mais en écrivant ce livre il tenait surtout à faire connaître la manière dont il a l'habitude d'exposer les principes du calcul infinitésimal, manière qui, en effet, s'écarte sensiblement de celle à laquelle nous sommes habitués en France et en Suisse.

Dans l'introduction il rappelle, en les précisant, les premières règles du calcul dans le domaine réel et quelques notions, par exemple celle de coupure, que l'étudiant est censé connaître. Mais le lecteur qui s'intéresse aux fondements de l'analyse fera bien de consulter le petit livre de M. Landau « Grundlagen der Analysis » publié en 1930, qu'on peut considérer comme une introduction à cet ouvrage.

Je ne saurais analyser en détail les trente et un chapitres du livre. Voici les sujets principaux traités dans la première partie: suites convergentes, notion de fonction, en particulier celle de fonction continue, notion de dérivée, le théorème de la moyenne, séries infinies, fonctions circulaires, fonctions de deux variables, fonction implicite, etc.; et dans la seconde: notion d'intégrale indéfinie, règles fondamentales, notion d'intégrale définie, intégration de séries, la fonction gamma et les séries de Fourier. Ce qui caractérise du reste l'exposé de M. Landau, c'est surtout la manière dont ces sujets sont traités, en particulier la manière dont il définit les notions fondamentales et certaines fonctions élémentaires. La fonction $\log x$, par exemple, est définie comme limite du produit de deux facteurs $k = 2^n$ et $\sqrt[k]{x} - 1$, lorsque le nombre entier n augmente indéfiniment, le nombre e est le nombre dont le logarithme ainsi défini est égal à l'unité; ce n'est que beaucoup plus loin, dans le chapitre 15, que nous retrouvons l'expression classique de e; les fonctions circulaires $\cos x$ et $\sin x$ sont définies à l'aide de séries entières et le nombre π est, par définition, le double du plus petit zéro positif de $\cos x$, point de vue qu'on adopte rarement dans les éléments, mais qui a des avantages (cf. par exemple l'*Introduction à la théorie des fonctions*, de Jules Tannery). On évite ainsi de faire appel à l'intuition géométrique et l'analyse est arithmétisée au sens de Weierstrass. Le livre ne contient aucune figure, ce qui n'empêchera pas l'étudiant d'en construire quelques-unes lui-même; il en reconnaîtra l'utilité, tout en sachant qu'on peut s'en passer.

Un rôle de premier plan est joué par des exemples habilement choisis,

qui tantôt précèdent la définition d'une notion nouvelle ou l'énoncé d'un théorème et tantôt les expliquent et les interprètent. C'est ainsi que la définition de la notion de continuité est donnée à la page 54, mais déjà à la page 51 l'auteur donne cinq exemples de fonctions, tantôt continues partout, tantôt discontinues en un point ou dans un intervalle. Guidé par l'auteur, l'étudiant participe à la construction des êtres mathématiques, il se rend mieux compte de la nécessité de certaines restrictions et de la portée des théorèmes établis. Certains chapitres du livre ne sont cependant pas faciles à lire, mais les raisonnements les plus délicats sont toujours décomposés en éléments simples; je ne pense donc pas que l'étudiant soit jamais arrêté par une démonstration, si subtile soit-elle; il apprendra en tout cas une foule de choses intéressantes et peu connues. C'est ainsi que, dans le chapitre cinq, l'auteur donne un exemple élégant imaginé par M. van der Waerden, d'une fonction continue non dérivable, exemple plus simple que ceux de Weierstrass et de Cellérier. Je signalerai encore certaines propriétés, peu connues aussi, des séries uniformément convergentes établies dans le chapitre treize, et dans la seconde partie la notion délicate d'intégrale définie, le second théorème de la moyenne et un théorème très curieux de van der Corput-Landau qui joue un rôle important dans la théorie des nombres. Enfin, dans les deux derniers chapitres, on trouve un exposé très clair des propriétés fondamentales de la fonction gamma et des séries de Fourier.

On peut juger, par ces indications et ces exemple,s quel est l'intérêt du livre de M. Landau. Un débutant y trouvera un exposé magistral des principes du calcul infinitésimal, et, à un étudiant plus avancé, l'ouvrage de M. Landau apportera des faits nouveaux et surtout des précisions nouvelles; il verra certaines théories déjà étudiées dans une perspective plus exacte et en saisira beaucoup mieux le rôle et la portée.

D. Mirimanoff (Genève).

E. Lindelöf. — **Einführung in die höhere Analysis** zum Selbststudium und für Studierende der ersten Semester. Nach der ersten schwedischen und zweiten finnischen Auflage, deutsch herausgegeben von E. Ullrich. — Un vol. in-8° de 526 pages avec 84 figures; relié, RM. 16; B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1934.

Cette introduction à l'analyse supérieure correspond aux leçons que professe depuis de nombreuses années le savant professeur finlandais à l'Université de Helsingfors. La traduction allemande a été rédigée d'après la première édition suédoise et la deuxième édition finnoise par M. E. Ullrich, professeur à l'Université de Marbourg. On constate dès le début que l'ouvrage est le fruit d'une longue expérience de l'enseignement. L'auteur tient compte dans une large mesure des besoins du débutant, tout en gardant un extrême souci de l'exactitude et de la rigueur. C'est ce qui le distingue d'autres « introductions » souvent trop arides pour l'étudiant de première année. Pour faciliter le passage de l'enseignement secondaire supérieur à l'université, l'auteur reprend et complète tout d'abord les notions sur les fonctions élémentaires. Ce n'est que plus tard qu'il entreprend l'étude approfondie des nombres irrationnels.

Les matières sont réparties comme suit: Les fonctions élémentaires. — Le calcul approximatif. — Fractions continues. — Des limites. — Dérivées d'une fonction. — Rectification, quadrature et cubature. — Les intégrales et leurs applications. — Le domaine des nombres réels. — Le domaine des nombres complexes. Résolution des équations. — Systèmes d'équations linéaires. Déterminants.

Cet excellent traité de mathématiques générales se recommande par sa clarté, sa brièveté et sa rigueur.

H. FEHR.

H. LIEBMANN. — **Synthetische Geometrie.** (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 40.) — Un vol. in-8° de 119 pages et 45 figures, cart.; RM. 5,60; B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1934.

Les traités classiques exposent la géométrie synthétique moderne en évitant toute notion métrique. Au point de vue axiomatique cette méthode présente sans doute un grand intérêt. Par contre, lorsque l'on s'adresse à des étudiants, à des débutants, il est préférable de ne pas écarter l'idée de mesure. Dans le présent volume M. Liebmann montre que la géométrie synthétique peut être établie d'une manière rigoureuse sans renoncer systématiquement à la géométrie métrique et à la géométrie analytique.

La première partie débute par l'axiomatique et les théorèmes fondamentaux de la géométrie synthétique; puis vient l'étude des propriétés projectives des sections coniques. La seconde partie traite de la géométrie synthétique dans l'espace, notamment des quadriques réglées et des courbes gauches du quatrième ordre.

H. FEHR.

V. u. K. KOMMERELL. — **Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. I. Krümmung der Raumkurven und Flächen**; II. **Kurven auf Flächen. Spezielle Flächen. Theorie der Strahlensysteme.** Vierte Auflage (Göschens Lehrbücherei). — Deux vol. in-8° de 205 et 194 p., avec 38 et 22 fig.; reliés, chaque volume: 10 RM.; Walter de Gruyter & Co., Berlin.

Le traité de géométrie infinitésimale de MM. Kommerell est bien connu. Ses trois premières éditions ont paru dans la collection Schubert. Cette nouvelle édition, entièrement revue et complétée, a été incorporée dans la collection « Göschens Lehrbücherei », volumes grand in-8° qu'il ne faut pas confondre avec les petites monographies in-16 de la « Sammlung Göschen ».

Dans le premier volume, après avoir exposé les principales propriétés des courbes gauches et des surfaces développables, les auteurs abordent l'étude des surfaces: Courbure des surfaces, lignes tracées sur une surface, représentation conforme, déformation. Les simplifications introduites dans cette nouvelle édition sont dues principalement au fait que les auteurs utilisent dès le début la représentation paramétrique des surfaces.

Le second volume traite des formes fondamentales et de certaines catégories spéciales de surfaces telles que les surfaces minima, les surfaces à courbure totale constante, les surfaces réglées et leur déformation. L'ouvrage se termine par l'étude des propriétés des congruences de droite.

Parmi les paragraphes nouveaux, citons celui qui est consacré au déplacement parallèle de Levi-Civita et au tenseur de Riemann-Christoffel. Le lecteur se trouvera ainsi bien préparé pour entreprendre l'étude de la théorie de la relativité.

Sous cette nouvelle forme l'ouvrage de MM. Kommerell mérite de retenir l'attention de tous ceux qui désirent acquérir les connaissances indispensables à l'étude des recherches modernes dans les divers domaines de la géométrie infinitésimale.

H. FEHR.

D.-E. SMITH et J. GINSBURG. — **A History of Mathematics in America before 1900.** — (The Carus Mathematical Monographs, No. 5). — Un volume in-16 de 208 pages. Relié. The Mathematical Association of America and Open Court Publishing Company, Chicago Ill. 1934.

La fondation Carus a pour but de favoriser la publication de monographies permettant de rendre accessibles au public cultivé les progrès réalisés dans les divers domaines des sciences mathématiques. Son comité a été bien inspiré en demandant à M. David Eugène Smith, professeur émérite de l'Université Columbia à New-York, d'exposer l'histoire des mathématiques avant 1900. Avec la collaboration du professeur J. Ginsburg, du Yeshiva College, qui connaît particulièrement bien toutes les ressources dont disposent les bibliothèques américaines, M. Smith a réuni une documentation considérable dont le présent volume ne donne qu'un faible aperçu.

On lira avec intérêt ces pages qui montrent qu'elles sont les étapes franchies depuis l'établissement des premiers colons jusqu'à l'époque à laquelle commence un essor particulièrement brillant des Sciences mathématiques en Amérique. L'ouvrage est divisé en quatre chapitres: I. Les XVIe et XVIIe siècles. — II. Le XVIIIe siècle. — III. Le XIXe siècle. Aperçu général. — IV. La période de 1875 à 1900.

Pour chacune de ces époques, les auteurs montrent quelle a été l'influence de l'Europe; ils signalent le progrès réalisé dans l'enseignement public et privé, la fondation des grandes universités, des sociétés savantes et des périodiques scientifiques; ils mentionnent les savants qui ont pris une part active au développement des sciences mathématiques pures et appliquées en Amérique.

Ce n'est guère que dans le dernier quart du XIXe siècle que commence réellement l'intérêt pour la recherche scientifique, l'étude des mathématiques pour elles-mêmes. Cet essor provient tout d'abord d'une organisation plus moderne des sections mathématiques dans les grandes universités. En 1877, l'Université John Hopkins fait appel au célèbre mathématicien anglais Sylvester (1814-1897) qui vient enseigner à Baltimore pendant 6 ans (1877-1883). C'est à lui et à son collègue Story que l'on doit l'*American Journal of Mathematics* destiné à publier leurs travaux et ceux de leurs élèves.

Puis c'est aussi l'influence féconde de l'*American Mathematical Society*, fondée en 1888, sur l'initiative du professeur Fiske, de la Columbia University et de son *Bulletin* (1891). A cette époque remontent aussi les *Annals of Mathematics* et l'*American mathematical Monthly*.

Enfin c'est l'impulsion que reçoivent en Europe les nombreux jeunes savants américains qui viennent poursuivre leurs études dans les grands

centres mathématiques, en Allemagne, en Angleterre, en France et en Italie. En 1897 six d'entre-eux participent au premier Congrès international des mathématiciens tenu à Zurich; au récent Congrès de Zurich (1932) l'Amérique du Nord comptait 68 participants.

Parmi les savants qui ont illustré la fin du XIXe siècle citons, entre autres, Benjamin Peirce et ses fils James Mills et Charles Sanders Peirce, ainsi que son cousin B. Osgood Peirce, G. W. Hill, Simon Newcomb, J. D. Runkle, J. C. Watson, E. McClintock, W. I. Stringham, R. S. Woodward, H. A. Newton, M. Merriman, W. W. Johnson, le père J. G. Hagen, G. B. Halsted, E. H. Moore, H. Maschke, J. Harkness, M. Bôcher, J. W. Gibbs.

Depuis le début du XXe siècle, le mouvement scientifique aux Etats-Unis n'a fait que progresser. Aujourd'hui les savants américains contribuent d'une manière active à la collaboration internationale dans tous les domaines. Qu'il nous suffise de rappeler en terminant que c'est précisément le professeur David Eugène Smith qui a remplacé Félix Klein à la présidence de la Commission internationale de l'enseignement mathématique et que, lors de sa retraite, en 1932, la Commission lui a conféré le titre de Président d'honneur.

H. Fehr.

G. Loria. — **Storia delle Matematiche.** Volume terzo et ultimo. Dall'alba del secolo XVIII al Tramonto des secolo XIX. Con numeroso figure nel testo. — Un vol. in-16 de 607 pages, avec 15 figures; cart., Lires 23.—; Sten, Turin, 1933.

C'est par ce volume que se termine l'histoire des mathématiques que le professeur Loria publie dans la collection « Storia della Scienze ». Il donne un aperçu du développement des mathématiques au cours des XVIIIe et XIXe siècles. C'est la période qui va de Jean Bernoulli et Léonard Euler à Henri Poincaré et Georg Cantor, en passant par Lagrange, Monge, Poncelet, Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Möbius, Steiner, Cremona, pour ne citer que quelques-uns des grands noms.

La façon dont les matières sont réparties facilite beaucoup la consultation de l'ouvrage qui est d'une lecture très captivante.

Voici la division adoptée pour ce troisième et dernier volume:

Capitolo XXXI. Durante la grande contesa. 1) Nella Svizzera tedesca; 2) In Inghilterra. — XXXII. I nuovi calcoli in Italia e in Francia. — XXXIII. La teoria delle probabilità nella sua prima fase di sviluppo. — XXXIV. L. Euler. — XXXV. Contemporanei di Euler. — XXXVI. G. L. Lagrange. — XXXVII. Le matematiche durante la Rivoluzione francese, il Consolato e l'Impero. — XXXVIII. La goemetria verso una nuova rinàscita. 1) Sulle orme degli antichi geometri; 2) Prodromi di una metamorfosi nella geometria. — XXXIX. La Germania alla riscossa. 1) Trattatisti e Combinatori; 2) C. F. Gauss. — XL. Orientamento dell'analisi verso procedimenti rigorosi. 1) B. Bolzano; 2) A. L. Cauchy; 3) N. H. Abel; 4) C. G. J. Jacobi. — XLI. Costituzione della fisica matematica. — XLII. Il periodo aureo della geometria projettiva. 1) Ricerche geometriche; 2) Ricerche analitico-geometriche; nuovi sussidi algoritmici. — XLIII. Nuovi armi sul vetusto tronco. — XLIV. L'analisi matematica da Cauchy e Jacobi a Poincaré e G. Cantor. — XLV. Gli storici. — Appendice. Le matematiche nell'Estremo Oriente.

Au moment où dans les congrès de mathématiques, d'histoire des sciences et de philosophie on recommande périodiquement l'introduction de notions historiques dans l'enseignement secondaire, l'ouvrage de M. Loria sera consulté avec profit par les professeurs. Il sera aussi lu avec intérêt par les étudiants.

H. FEHR.

Index generalis 1934, publié sous la direction de R. DE MONTESSUS DE BALLORE. — Un vol. in-16; 225 fr. fr.; Editions Spes, Paris, 1934.

L'Index Generalis paraît tous les ans depuis 1919. La première partie (environ 900 pages) concerne les Universités et Ecoles supérieures du monde entier; les cours professés et les noms des professeurs sont indiqués avec tous détails utiles. La seconde partie se rapporte aux observatoires, aux bibliothèques, aux instituts scientifiques, aux grandes académies, aux sociétés savantes des divers pays civilisés. Grâce à des *clefs*, les plus grands détails sont donnés dans le nombre minimum de pages.

Les 6.500 notices de l'*Index Generalis* sont inscrites dans les langues mêmes des pays qu'elles concernent, sauf que les langues peu usuelles ont été remplacées par le français. Les chefs de service ont bien voulu accepter, unanimement, de mettre à jour chaque année les notices les concernant; ils ont reconnu qu'il n'y avait pas d'autre moyen de mettre l'*Index Generalis* vraiment à jour et de faire connaître, chacun, l'Institut scientifique qu'il dirige.

Une *liste d'échanges* aide les savants à faire connaître leurs travaux; l'inscription est accordée *gracieusement*, sur demande adressée au directeur de l'*Index Generalis*.

Des tables très complètes dont la table alphabétique des 60.000 personnalités scientifiques et littéraires (65.000 références citées dans le volume) terminent l'*Index Generalis*.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

F. ENRIQUES et O. CHISINI. — **Lezioni sulla Teoria Geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.** Vol. IV. Funzioni ellittiche e abeliane. — Un vol. in-8° de 271 pages, relié, 60 lires; Nicola Zanichelli, Bologne, 1934.