Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1933)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN THÉORÈME DE COURNOT
Autor: Mirimanoff, D.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25325

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR UN THÉORÈME DE COURNOT

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

Introduction. — Dans le chapitre III de son livre « Exposition de la théorie des chances et des probabilités » COURNOT [1] énonce trois théorèmes, qu'il attribue à Jacques BERNOULLI. Le dernier, et le plus important des trois, est le fameux théorème de Bernoulli généralisé au XIXe siècle par POISSON et TCHÉBYCHEFF; le premier figure parmi les propositions auxiliaires à l'aide desquelles Bernoulli a établi son grand théorème; quant au second, il n'est équivalent, si je ne me trompe, à aucun des théorèmes donnés par Bernoulli dans la quatrième partie de son livre « *Ars conjectandi* ». Cournot l'énonce de la manière suivante:

« A mesure qu'on multiplie les épreuves, le nombre des répartitions possibles augmentant, la probabilité de chaque valeur, pour le rapport du nombre des événements A à celui des événements B, va en diminuant, mais d'autant plus rapidement que le rapport en question s'écarte plus du rapport entre les probabilités de A et de B, et d'autant plus lentement qu'il s'en rapproche davantage. »

On voit que ce théorème contient deux affirmations:

1. La probabilité en question est une fonction décroissante du nombre des épreuves;

2. Cette probabilité décroît d'autant plus rapidement que le rapport des fréquences de A et de B s'écarte davantage du rapport des probabilités de A et de B.

---

[1] COURNOT, *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris, 1843, p. 54.

Je ne m'occuperai ici que de la première partie du théorème de Cournot.

Il n'est pas difficile de la démontrer à l'aide de la formule de STIRLING[1]. Mais je ne sais si l'on a jamais cherché à l'établir d'une manière plus directe et plus naturelle. Je montrerai qu'elle se déduit très simplement d'un théorème d'arithmétique, certainement connu, dont la démonstration est immédiate.

1. *Un théorème d'arithmétique.*

Soient a et b deux nombres entiers premiers entre eux. Envisageons les suites

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{2}{a}, \ldots \quad \frac{a-1}{a}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{b}, \quad \frac{2}{b}, \ldots \quad \frac{b-1}{b}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{a+b}, \quad \frac{2}{a+b}, \ldots \quad \frac{a+b-1}{a+b}. \tag{3}$$

La suite (3) définit $a + b - 2$ intervalles. Je dis que chacun de ces intervalles contient au sens étroit l'une des fractions (1) ou (2) et une seule.

Démonstration. Rangeons l'ensemble des fractions (1) et (2) par ordre de grandeur croissante. Nous obtiendrons une suite nouvelle, que j'appellerai suite (4), qui contiendra $a + b - 2$ fractions toutes distinctes, puisque par hypothèse a est premier à b. Je dis que deux fractions de (4) qui se succèdent sont toujours séparées par une fraction (3).

En effet, lorsque les deux fractions du couple appartiennent soit à (1), soit à (2), la propriété est évidente, puisque chacune des fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ est supérieur à $\frac{1}{a+b}$. Si, au contraire, l'une des fractions du couple $\left(\frac{\alpha}{a}\right)$ fait partie de (1), et l'autre $\left(\frac{\beta}{b}\right)$ de (2), elles sont séparées par la médiante $\frac{\alpha+\beta}{a+b}$, puisque les différences $\frac{\alpha+\beta}{a+b} - \frac{\alpha}{a}$, $\frac{\alpha+\beta}{a+b} - \frac{\beta}{b}$ sont de signes contraires.

---

[1] Cf. R. DE MONTESSUS, *Leçons élémentaires sur le Calcul des probabilités*, Paris. Gauthier-Villars, 1908. Comme me l'a fait remarquer M. Samuel DUMAS, les inégalités initiales (n° 44 de l'ouvrage cité, p. 53, lignes 4 et 8), pourtant exactes, doivent être remplacées par des inégalités de sens contraire, si l'on veut arriver à la relation finale.

Comme, d'autre part, le nombre des intervalles définis par (3) est égal au nombre des fractions de (4), chacun de ces intervalles contient une fraction de (4) et une seule. C. Q. F. D.

2. *Démonstration de la première partie du théorème II de Cournot.*

Soient s le nombre des épreuves, p la probabilité de l'événement A, $q = 1 - p$ celle de l'événement contraire B. On sait que la probabilité $P(m, s)$ pour que l'événement A se réalise m fois au cours de s épreuves est donnée par la formule

$$P(m, s) = \frac{s!}{m!\,(s-m)!} p^m q^{s-m} .$$

Supposons, avec Cournot, que le rapport du nombre des événements A à celui des événements B ou bien, ce qui revient au même, que le rapport $f = \frac{m}{s}$, fréquence relative de A, demeure constant, lorsqu'on multiplie les épreuves. Si $\frac{a}{c}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{m}{s}$, le nombre m parcourt la suite croissante des multiples an de a et le nombre s la suite croissante des multiples cn de c ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Posons $1 - f = \frac{b}{c} = \frac{c-a}{c}$. Il suffit de montrer que

$$\frac{P(a(n+1), c(n+1))}{P(an, cn)} < 1 ,$$

quel que soit n.

Or, le premier membre de cette inégalité s'écrit

$$\frac{(cn+1)(cn+2)\ldots(cn+c)\,p^a q^b}{(an+1)(an+2)\ldots(an+a) \times (bn+1)(bn+2)\ldots(bn+b)}$$

et comme [1]

$$p^a q^b \leq \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{c}\right)^b ,$$

il suffit de montrer que le rapport

$$\frac{\left(n+\frac{1}{c}\right)\left(n+\frac{2}{c}\right)\ldots(n+1)}{\left(n+\frac{1}{a}\right)\left(n+\frac{2}{a}\right)\ldots(n+1) \times \left(n+\frac{1}{b}\right)\left(n+\frac{2}{b}\right)\ldots(n+1)}$$

[1] R. DE MONTESSUS, *loc. cit.*, p. 53.

est inférieur à 1 ou à fortiori que le produit

$$\left(n+\frac{1}{c}\right)\left(n+\frac{2}{c}\right)\dots\left(n+\frac{c-2}{c}\right) \tag{5}$$

est inférieur à

$$\left(n+\frac{1}{a}\right)\left(n+\frac{2}{a}\right)\dots\left(n+\frac{a-1}{a}\right)\times\left(n+\frac{1}{b}\right)\left(n+\frac{2}{b}\right)\dots\left(n+\frac{b-1}{b}\right). \tag{6}$$

Or le théorème d'arithmétique s'applique non seulement aux suites (1), (2), (3), mais encore aux suites

$$n+\frac{1}{a}, \quad n+\frac{2}{a}, \quad \dots \quad n+\frac{a-1}{a}, \tag{1'}$$

$$n+\frac{1}{b}, \quad n+\frac{2}{b}, \quad \dots \quad n+\frac{b-1}{b}, \tag{2'}$$

$$n+\frac{1}{c}, \quad n+\frac{2}{c}, \quad \dots \quad n+\frac{c-1}{c}, \tag{3'}$$

puisque $c = a + b$ et que a et b sont premiers entre eux.

A chaque nombre $n+\frac{i}{c}$ de (3'), sauf le dernier $n+\frac{c-1}{c}$, faisons correspondre le nombre de (1') ou de (2') qui est situé dans l'intervalle $\left(n+\frac{i}{c},\ n+\frac{i+1}{c}\right)$. A chaque fraction de (5) correspond alors un facteur plus grand de (6).

Donc (5) < (6) et la première partie du théorème II de Cournot est établie.

Quant à la deuxième partie du théorème II de Cournot, je n'ai pu la démontrer qu'en m'appuyant sur la formule sommatoire d'Euler. Je ne sais s'il en existe une démonstration plus simple et je me demande s'il serait possible de l'établir en partant de considérations arithmétiques analogues à celles qui m'ont permis de démontrer la première partie de ce théorème.

Octobre 1933.