SUR LA FORMULE DE TAYLOR

Autor(en): **Ciornescu, Nicolas**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25326

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LA FORMULE DE TAYLOR

PAR

Nicolas CIORĂNESCU (Bucarest).

---

1. — Soit $f(x)$ un polynome de degré n. On a alors, d'après la formule de Taylor

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} x^p \frac{f^{(p)}(y)}{p!} . \tag{1}$$

Proposons-nous de trouver les fonctions $f(x)$ qui jouissent d'une propriété analogue à celle exprimée par la formule (1), c'est-à-dire pour lesquelles on ait

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} f_p(x) \cdot \varphi_p(y) \tag{2}$$

dans tout leur domaine d'existence, les $f_p(x)$ et les $\varphi_p(y)$ étant des fonctions qui restent encore à déterminer.

Nous allons prendre cette propriété de décomposition de $f(x+y)$ exprimée par la relation (2), comme propriété caractéristique de la formule (1) de Taylor pour le polynome de degré n, et chercher s'il existe des fonctions plus générales qui aient la même propriété, ou si les polynomes sont les seules fonctions pour lesquelles on peut avoir une telle relation.

2. — Si, dans la relation (2), nous faisons $y = 0$ et si nous posons $\varphi_p(0) = a_p$, on voit que

a) il n'est pas possible que tous les a_p soient nuls, car alors on aurait $f(x) \equiv 0$;

b) on a

$$f(x) = \sum_0^n a_p f_p(x) \quad ; \tag{3}$$

par conséquent $f(x)$ est une combinaison linéaire des fonctions $f_p(x)$. Pour trouver ces fonctions nous allons supposer qu'elles ont des dérivées de $n+1$ premiers ordres, et, à cause de la relation (3), il résulte qu'il en est de même de $f(x)$.

Alors, on déduit en dérivant la relation (2) m fois par rapport à x.

$$f^{(m)}(x+y) = \sum_0^n f_p^{(m)}(x) \cdot \varphi_p(y) \ . \qquad (m = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{4}$$

Les relations (2) et (4) constituent un système linéaire de $n+2$ équations avec $n+1$ inconnues: les fonctions $\varphi_p(y)$.

Pour que ce système soit compatible, il faut que

$$\begin{vmatrix} f(x+y) & f_0(x) & f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f'(x+y) & f_0'(x) & f_1'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ f''(x+y) & f_0''(x) & f_1''(x) & \ldots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{(n+1)}(x+y) & f_0^{(n+1)}(x) & f_1^{(n+1)}(x) & \ldots & f_n^{(n+1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{5}$$

ce qui veut dire qu'il existe des coefficients non tous nuls, tels que les éléments de chaque colonne vérifient une même relation linéaire. Par conséquent on doit avoir des relations de la forme suivante

$$\left\{ \begin{aligned} & A_0 f^{(n+1)}(x+y) + A_1 f^{(n)}(x+y) + \ldots \\ & \qquad\qquad + A_n f'(x+y) + A_{n+1} f(x+y) = 0 \ , \\ & A_0 f_p^{(n+1)}(x) + A_1 f_p^{(n)}(x) + \ldots \\ & \qquad\qquad + A_n f_p'(x) + A_{n+1} f_p(x) = 0 \ , \\ & \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots n) \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Il en résulte que les coefficients A_k sont des constantes. En effet, d'après la relation (3) $f(x)$ doit vérifier la même équation (6)

que les fonctions $f_p(x)$; mais d'après la première relation (6) on voit que cette équation est indépendente de l'argument de f.

Par conséquent, les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_n(x)$ doivent être solutions d'une même équation différentielle linéaire d'ordre $n+1$ et à coefficients constants. Cette condition nécessaire que doivent satisfaire les fonctions $f_p(x)$, est aussi suffisante, car alors le système (2), (4) est compatible, quelque soit l'entier m.

Si les $f_p(x)$ forment un système fondamental de l'équation différentielle dont il a été question, alors $f(x)$ donné par (3) est la solution la plus générale de cette équation; et comme les $f_p(x)$ sont de la forme: $x^k e^{rx}$ (avec $0 \leqq k \leqq n$, le nombre des constantes r distinctes étant $\leqq n$), il en résulte que $f(x)$ est une combinaison linéaire de termes de cette forme.

Si au lieu de dériver la relation (2) par rapport à x, on la dérive par rapport à y, on déduit de la même manière que les fonctions $\varphi_p(y)$ sont solutions de la même équation différentielle, car l'équation analogue à (6) qu'ils doivent vérifier est vérifiée aussi par f.

3. — Supposons qu'on ait pris pour les $f_p(x)$ un système fondamental de solutions d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre $n+1$, à coefficients constants. Alors, pour toute solution de cette équation on a une formule d'addition de l'argument donnée par la relation (2).

Mais pour être complet, il faut aussi déterminer les fonctions $\varphi_p(y)$. Cela peut se faire sans aucune difficulté. Posons pour simplifier l'écriture:

$$f_k(0) = f_{0k} \; ; \qquad f_k^{(m)}(0) = f_{mk} \; .$$

Alors du système

$$f^{(m)}(y) = \sum_{p=0}^{n} f_{mp} \, . \, \varphi_p(y) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots n) \qquad (7)$$

on peut tirer les $\varphi_p(y)$, dans l'hypothèse que le wronskien $\Delta(f_0, f_1, \ldots f_n)$ des fonctions $f_p(x)$, qui par l'hypothèse même faite sur ces fonctions n'est pas identiquement nul, ne s'annule

pas pour $x = 0$. Soit $\Delta_0 \neq 0$ sa valeur pour $x = 0$. On a alors:

$$\Delta_0 \varphi_0(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f_{01} & f_{02} & \cdots & f_{0n} \\ f'(x) & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{(n)}(x) & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta_0 \varphi_1(x) = \begin{vmatrix} f_{00} & f(x) & f_{02} & \cdots & f_{0n} \\ f_{10} & f'(x) & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n0} & f^{(n)}(x) & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} . \tag{8}$$

etc.

Nous avons dit que les $\varphi_p(x)$ sont solutions de la même équation que les $f_q(x)$. On doit par conséquent avoir

$$\varphi_p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{pk} f_k(x) . \tag{9}$$

Nous saurons mettre les $\varphi_p(x)$ sous cette forme toutes les fois qu'on pourra exprimer les $f_k^{(m)}(x)$, qui sont aussi solution de la même équation différentielle, à l'aide des fonctions $f_k(x)$.

Lorsque $\Delta_0 = 0$, on peut considérer le système formé par les équations (2) et les n premières équations du système (4) pour une valeur $x = x_0$ qui n'annule pas $\Delta(f_0, f_1, \ldots f_n)$.

En considérant les systèmes (2), (7) comme un système de $n + 2$ équations en $\varphi_k(y)$, on a la formule (2) que vérifie $f(x+y)$, en formant l'éliminant de ce système:

$$\begin{vmatrix} f(x+y) & f_0(x) & f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f(y) & f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0n} \\ f'(y) & f_{10} & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{(n)}(y) & f_{n0} & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

qui généralise la formule de Taylor pour la classe de fonctions que nous avons déterminée.

4. — *Applications.* *a*) Soit l'équation différentielle $\frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}} = 0$, dont un système fondamental est: $f_p(x) = x^p$ $(p = 0, 1, \dots n)$. Dans ce cas $\Delta_0 = 1!\,2!\,3!\dots n!$ et $f_{ik} = 0$ si $i \neq k$. En appliquant la formule (10) on retrouve la formule (1) de Taylor.

b) Considérons l'équation du second ordre: $z'' + z = 0$ qui admet les solutions fondamentales $\cos x$, $\sin x$. Alors, on déduit de (10), que pour toute fonction de la forme:

$$f(x) = \mathrm{A} \cos x + \mathrm{B} \sin x \ ,$$

on a la relation:

$$f(x + y) = f(y) \cos x + f'(y) \sin x \tag{11}$$

qui contient comme cas particulier la formule d'addition du cosinus et du sinus.

Peut-être qu'il n'est pas banal de montrer que les formules d'addition de ces fonctions appartiennent à la même famille que la formule de Taylor pour un polynome ! Par contre, pour la fonction $f(x) = \mathrm{A} \cos x + \mathrm{B} \sin 2x$, on ne peut pas avoir une relation de la forme (11), car les fonctions $\cos x$ et $\sin 2x$ ne sont pas solutions de la même équation linéaire à coefficients constants.

Sans insister d'avantage sur cette question, nous croyons qu'il est intéressant de présenter aussi sous cet aspect la formule classique de Taylor.