Marston Morse. — The Calculus of Variations in the Large (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XVIII). — Un vol. gr. in-8° de x-368 pages. Prix: $4,50. Published by the American Mathematical Society. New-York, 1934.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'intérêt devient immense avec les fonctions quelconques dont la variable est une matrice. Un polynome matriciel à deux variables égalé à zéro et d'où l'on tente d'extraire l'une de ces variables conduit à une généralisation matricielle de la fonction algébrique ! Il est à peine besoin de dire que l'on sait encore bien peu de choses sur ces généralisations. Les séries entières à variable matricielle ne sont pas toutes hors d'atteinte; Henri Poincaré en a manié quelques-unes sans parler de matrices. Voir, à cet égard, dans *L'Enseignement mathématique* le récent article Schwerdtfeger (t. 32, 1933, p. 304).

Tout ceci conduit aux algèbres linéairement associatives qui ne sont que des constructions groupales diverses. Cet aboutissement est très naturel pour ce que l'on appelait autrefois la Théorie des substitutions linéaires. Le terme de Calcul matriciel a prévalu, sans doute parce que la matrice est une manière de nombre complexe; l'acheminement vers la forme actuelle laisse voir, tout le long de la route, des constructions déjà prodigieuses telles que les quaternions de Hamilton, l'Ausdehnungslehre de Grassmann, les symétries algébriques où excellèrent Cayley dans un but géométrique et Tait dans un but physique. Il faudrait citer ensuite Frobenius, Sylvester, Peano, Brill et tant d'autres. Il y a 549 références dans l'Index qui termine l'ouvrage ce qui prouve que les matrices, aujourd'hui au premier plan, avaient déjà le plus brillant des passés. Grâce à M. Wedderburn, nous allons les connaître mieux encore. A. Buhl (Toulouse).

Marston Morse. — **The Calculus of Variations in the Large** (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XVIII). — Un vol. gr. in-8° de x-368 pages. Prix: $4,50. Published by the American Mathematical Society. New-York, 1934.

Œuvre merveilleuse précédée d'une Préface qui ne l'est pas moins. Je voudrais mettre ici la traduction exacte de cette Préface; faute de place, je me contenterai d'un résumé.

Depuis nombre d'années la recherche des auteurs mathématiques a été orientée par une conception qui peut être désignée par le terme de macro-analyse. Je ne sais si ce mot fera fortune en français bien qu'il soit parfaitement à l'aise dans le texte anglais sous la forme *macro-analysis*. Nous dirions plutôt analyse *au sens large* comme dans le titre du volume. Quoiqu'il en soit, il faut opposer ce sens large au sens étroit de l'Analyse infinitésimale classique, de l'Analyse des fonctions analytiques, c'est-à-dire pourvues de dérivées en nombre infini. Les notions intégrales subsistent en d'immenses domaines où les notions différentielles disparaissent et le Calcul des variations est surtout un Calcul intégral; il est donc tout indiqué pour donner l'un des types du calcul *large*. Il peut profiter de considérations groupales et topologiques où l'infinitésimal n'a rien à voir. Ceci, comme le remarque M. Marston Morse, fut d'abord l'œuvre de Poincaré. Le Calcul fonctionnel s'en mêlant, nous trouvons ensuite Hilbert, si bien que le présent volume, XVIII pourra être comparé, avec grand intérêt, avec le volume XV de M. Stone, précédemment analysé.

Avant d'être *large*, le présent exposé ne manque pas d'être *étroit* et de nous rappeler les positions infinitésimales des questions. Les équations d'Euler sont différentielles, mais ce terrain, pour être infinitésimal, ne suppose pas l'existence de dérivées de tous ordres; en s'en tenant à des ordres bien

déterminés, on aura des *classes* bien déterminées. Il y a quelque chose d'analogue du côté des conditions aux limites (Ch. II), notamment avec les hypothèses de non tangentialité. Ici intervient déjà la théorie des *racines caractéristiques* dont toute la signification issue des conditions aux limites a été donnée par Hilbert et Courant dans leurs *Methoden der mathematischen Physik* (voir *L'Ens. mathématique*, t. 30, 1931, p. 165). Plus précisément, ceci introduit une forme quadratique ou *index form* à laquelle est consacré le Chapitre III. Dans le cas d'extrêmales périodiques ceci nous reporte à des travaux de J. Hadamard, Poincaré, Carathéodory, Hedlund.

Au Chapitre IV nous retrouvons la notion des systèmes *self-adjoints*, l'expression soulignée ayant encore joué un grand rôle dans le volume Stone. Certes l'analogie n'est pas à marquer d'une manière immédiate et absolument obligatoire; en mathématiques et dans des ordres d'idées assez différents, il y a bien des transformations, bien des formes, bien des équations qui peuvent être identiques à leurs *adjointes* mais présentement tout ceci peut relever d'une analyse à la Hilbert qui s'exerce d'abord sur des équations différentielles linéaires transformées en elle-mêmes autrefois par Sturm et Liouville et qui interviennent avec des conditions aux limites particulièrement simples. De tels sujets ont été également très approfondis par M. Emile Picard.

Avec le Chapitre V nous abordons la fonctionnelle sur un Espace de Riemann. La définition de cet espace par l'égalité $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ est d'abord *étroite* mais elle se prête incomparablement mieux à une extension dans le large que la définition métrique euclidienne. Il y a là finalement un mariage du Calcul fonctionnel avec le Calcul tensoriel qui ne laisserait, dans l'espace ordinaire, que des dégénérescences peu complètes. Nouvelle source de louanges pour la conception riemannienne.

Le Chapitre VI traite des ensembles de fonctions critiques, généralisation évidente des ensembles de points critiques de la théorie ordinaire des fonctions. Une telle généralisation ne coule pas de source, il s'en faut de beaucoup. Au contraire nombre de propriétés concernant des ensembles de points critiques doivent être reprises et modifiées pour que l'on puisse apercevoir leurs généralisations dans le domaine fonctionnel. Et celles-ci sont encore bien timides.

Les problèmes aux limites dans le large (Ch. VII) sont ceux qui se rapportent à l'espace fonctionnel; ils tendent vers l'allure purement topologique.

Les extrémales fermées (Ch. VIII) pouvant, pour ainsi dire, s'équilibrer elles-mêmes, sans termes limites extérieurs, donnent des problèmes plus simples que ceux du Chapitre précédent; c'est toujours l'Espace riemannien large qui est employé.

Ceci nous mène enfin (Ch. IX) à des questions de géodésiques fermées, à considérer, par exemple, sur des ellipsoïdes à m dimensions, questions introduites directement par Poincaré, perfectionnées par Birkhoff et quelques autres, à propos de Mécanique céleste, et qui devaient précisément ouvrir la voie aux hautes spéculations du Calcul des variations pris dans le sens large. Les généralisations obtenues permettent maintenant de dominer nombre de résultats dus à Henri Poincaré. Mais il est bien certain que nous n'en serions pas où nous en sommes si Poincaré n'avait pas commencé. De cela M. Marston Morse se rend compte mieux que personne et l'Ecole française lui en saura gré.

Le livre se termine par une Bibliographie étendue en laquelle, outre les noms déjà cités, je relève ceux d'Alexander, Alexandroff, Bieberbach, Bliss, Bôcher, Bolza, Brown, Dickson, Eisenhart, Fréchet, Hausdorff, Kellogg, Kneser, Kronecker, Lefschetz, W. Mayer, Menger, Morse, Plancherel, Radon, Tonelli, Veblen, Volterra, Van der Waerden, Whitehead, Wintner.

Admirable monument, d'un style ultra-moderne.

A. Buhl (Toulouse).

Raymond E. A. C. Paley and Norbert Wiener. — **Fourier Transforms in the Complex Domain** (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XIX). — Un vol. gr. in-8° de viii-184 pages. Prix: $3. Published by the American Mathematical Society. New-York, 1934.

Ouvrage endeuillé de manière particulièrement navrante. Il est publié par M. Norbert Wiener seul, R. E. A. C. Paley (1907-1933) ayant été victime d'un accident sportif. Fin qui rappelle celle de Jacques Herbrand dont nous avons récemment entretenu nos lecteurs à propos des *Actualités scientifiques*. Le présent volume contient, en frontispice, un portrait de Paley particulièrement émouvant quant à tout ce qu'il exprime de belle et intelligente jeunesse brusquement fauchée. Le survivant a dédié le volume à G. H. Hardy et à J. E. Littlewood qui furent les professeurs des deux auteurs.

Le titre du livre porte assez à penser aux séries de Dirichlet et aux fonctions quasi-périodiques surtout étudiées par H. Bohr, plus particulièrement aux ouvrages de Vladimir Bernstein et de J. Favard récemment analysés dans *L'Enseignement mathématique* (t. 32, 1933, pp. 272-275) mais, à y regarder de plus près, on reconnaît vite que l'intérêt s'est fixé beaucoup moins sur les développements en séries que sur les représentations intégrales.

Il nous semble aussi que les théorèmes de Plancherel et de Parseval s'apparentent aisément au Calcul de Heaviside mentionné plus haut, cependant qu'on pourrait revenir à la Théorie des résidus avec les théorèmes du type Phragmén-Lindelöf. Tout ceci confirme, une fois de plus, l'extraordinaire richesse du Calcul intégral, sa puissance de représentation pour les fonctions analytiques ou non et la convergence des efforts de chercheurs qui, tout en s'ignorant souvent, faisaient des constructions mathématiques analogues répondant à des besoins identiques généralement nés de la Physique théorique.

Signalons d'abord les fonctions quasi-analytiques dont les dérivées satisfont à des modes de croissance qu'il y a tout avantage à soumettre à des conditions intégrales. Les équations intégrales de Laplace et de Planck conduisent à celle de Stieltjes avec réapparition d'intéressants symboles différentiels. Puis c'est tout une classe d'équations intégrales singulières où s'illustrent les noms de Wiener, Volterra, Hardy, non sans élégant emploi de la fonction Γ. Le même symbolisme intégral permet d'étudier la croissance des fonctions entières et d'essentielles propriétés de la fonction ζ de Riemann, fonction à laquelle E. C. Titchmarsh a consacré un livre peu volumineux mais fort savant qu'il est à propos de rappeler (voir *L'Ens. mathématique*, t. 29, 1930, p. 355).

On vient ensuite aux séries de fonctions exponentielles pour lesquelles je m'étonnais, plus haut, de ne pas trouver le nom de Dirichlet mais il est très certain qu'il y a ici tout un noyau d'originalités dues à Birkhoff, Walsh,