I. — Géométrie des distances et géométrie analytique ÉLÉMENTAIRE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

classiques et des problèmes dont s'occupe la plupart des mathématiciens.

Nous traiterons d'abord brièvement de quelques-uns des rapports entre la géométrie métrique et la géométrie analytique élémentaire des espaces ordinaires. Des remarques concernant l'algèbre et l'algèbre des vecteurs suivront. Nous passerons ensuite à l'étude de la convexité dont la théorie générale se lie étroitement à la géométrie axiomatique de l'espace ordinaire. Puis, toujours du point de vue des distances, nous introduirons la notion de courbure qui sera qualifiée pour servir de point de départ vers une géométrie différentielle. Nous terminerons par l'étude des lignes géodésiques qui nous fournira des résultats nouveaux très généraux relatifs au Calcul des variations.

I. — Géométrie des distances et géométrie analytique élémentaire.

En géométrie analytique élémentaire on prend comme point de départ de la théorie des espaces euclidiens à n dimensions la représentation de chaque point par n nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réels ou complexes selon qu'il s'agit de l'espace réel ou de l'espace complexe C_n. On appelle carré de la distance des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ le nombre [1]

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2 \tag{1}$$

en se réservant de prendre comme distance la racine carrée positive de l'expression précédente dans le cas où celle-ci est non négative. Nous appellerons *espace* à *carrés de distances complexes* [2] un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout

---

[1] Pour les espaces *unitaires* on fixe comme distance le nombre réel

$$(y_1 - x_1)(\overline{y_1} - \overline{x_1}) + \ldots + (y_n - x_n)(\overline{y_n} - \overline{x_n})$$

en désignant par $\overline{x}$ le conjugué $\xi - i\eta$ du nombre $x = \xi + i\eta$. Il est clair que du point de vue des distances cet espace unitaire à n dimensions est identique à un espace euclidien réel à $2n$ dimensions.

[2] On peut généraliser cette notion et parler d'un espace à distances empruntées à un système donné S, par exemple à un corps de nombres au sens de l'algèbre abstraite ou à un groupe abstrait. Pour des applications au calcul des variations j'ai récemment étudié des espaces dont les distances ne satisfont pas à l'axiome de symétrie (Δ_2). On pourrait appeler les espaces satisfaisant aux axiomes (Δ_1) et (Δ_2) espaces *à distances*

couple p, q de deux de ses éléments il corresponde un nombre $\overline{pq}^2$ (dit carré de la distance de p à q) assujetti aux conditions:

$$\overline{pp}^2 = 0 \,, \qquad (\Delta_1)$$

$$\overline{pq}^2 = \overline{qp}^2 \,. \qquad (\Delta_2)$$

Dans un espace à carrés de distances complexes tout ensemble F ne contenant qu'un nombre fini de points, disons k points $p_1, p_2, \ldots, p_k$, est complètement caractérisé par les k^2 carrés des distances des points de F entre eux, nombres qui peuvent être rangés dans une matrice. Il résulte des conditions (Δ_1) et (Δ_2) que cette matrice est symétrique et que sa diagonale principale ne contient que des zéros. Une question qui se pose de façon naturelle est la suivante: Etant donnée une matrice $\| \alpha_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ jouissant des deux propriétés mentionnées, sous quelles conditions peut-on la réaliser par les points d'un espace euclidien complexe ou réel, c'est-à-dire trouver k points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de cet espace tels que $\overline{a_i a_j}^2 = \alpha_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$?

Nous allons donner immédiatement la solution du problème plus général suivant [1]: Etant donné un espace à carrés de distances complexes C (c'est-à-dire une matrice de nombres en général infinie), établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse l'appliquer sur un sous-ensemble de l'espace euclidien à n dimensions, et d'abord de l'espace complexe C_n. De façon précise, nous établirons les conditions pour qu'on puisse faire correspondre à chaque point de C un point et un seul de C_n de sorte que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ étant les points de C_n correspondant respectivement aux points p et q de C,

---

symétriques complexes et réserver le nom d'espace à distances complexes à des ensembles dont la définition de la distance est assujettie à la condition (Δ_1) seule.

Une étude systématique des espaces à distances non symétriques, par M. Novak, paraîtra dans le cahier 8 des *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums.*, Wien, 1936.

[1] La caractérisation des espaces euclidiens réels et de leurs sous-ensembles au moyen des conditions (Δ^k) et (Δ^k_0) se trouve dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 113. Pour une nouvelle démonstration voir *Amer. Journ. of Math.*, 53, p. 721. Des remarques sur C_2 et $E_{2,1}$ se trouvent dans *Ergebnisse eines mathem. Kolloquiums*, 2, p. 34; 4, p. 13; 5, p. 10, 16; les critères de $E_{n,-n}$ dans *Tôhoku Math. Journ.*, 37, p. 475. La caractérisation générale des sous-ensembles de C_n et $E_{n,s}$ que nous allons énoncer est due à M. Wald et se trouve dans son article, *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 5, p. 32.

le nombre $\overline{pq}^2$ donné avec l'espace C satisfasse toujours à la condition

$$\overline{pq}^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 .$$

Appelons déterminant des points $p_1, p_2, \dots, p_k$ le nombre

$$\Delta(p_1, p_2, \dots, p_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \overline{p_1 p_2}^2 & \overline{p_1 p_3}^2 & \dots & \overline{p_1 p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_2 p_1}^2 & 0 & \overline{p_2 p_3}^2 & \dots & \overline{p_2 p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_3 p_1}^2 & \overline{p_3 p_2}^2 & 0 & \dots & \overline{p_3 p_k}^2 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 1 & \overline{p_k p_1}^2 & \overline{p_k p_2}^2 & \overline{p_k p_3}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Pour qu'un espace à carrés de distances complexes C *puisse être appliqué sur un sous-ensemble de* C_n *il est nécessaire et suffisant que*

(Δ_0^{n+3}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0$ *pour tout système de* $n + 3$ *points de* C

(Δ_0^{n+2}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0$ *pour tout système de* $n + 2$ *points de* C .

Appelons $E_{n,s}$ la partie de C_n constituée par les points $(x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_n)$, les nombres $x_1, \dots, x_m$ étant réels, les nombres $x'_{m+1}, \dots, x'_n$ purement imaginaires, m étant égal à $\frac{n+s}{2}$. Posons $x'_j = ix_j$ $(j = m + 1, m + 2, \dots, n)$, x_j réel. Le nombre (1) devient alors

$$(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2 - (y_{m+1} - x_{m+1})^2 - \dots - (y_n - x_n)^2 . \quad (1')$$

s est la signature de cette forme quadratique. Le $E_{n,s}$ est un espace à carrés de distances complexes tel que, pour chaque couple p, q de points, $\overline{pq}^2$ soit réel.

Nous dirons que l'ensemble F des k points $p_1, p_2, \dots, p_k$ est de rang r s'il satisfait aux conditions (Δ_0^{r+2}) et (Δ_0^{r+3}) sans satisfaire (Δ_0^{r+1}), c'est-à-dire si les déterminants de tous les systèmes de $r + 2$ et de $r + 3$ points de F sont nuls, mais s'il existe un système $r + 1$ points dont le déterminant est différent de 0.

Pour qu'un espace où $\overline{pq}^2$ est toujours réel jouisse de la propriété d'être applicable sur un sous-ensemble de $E_{n,s}$ il est suffisant (et évidemment nécessaire) que *tout système de* n + 3 *points de* E jouisse de cette même propriété; et pour qu'un système F de $n+3$ points $p_1, p_2, \ldots, p_{n+3}$ soit applicable sur un système de $n+3$ points de $E_{n,s}$ il faut et il suffit, r désignant le rang de F, 1° que l'on ait $r \leqq n$ et que 2° parmi les systèmes de $r+1$ points $p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}$ de F pour lesquels $\Delta(p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}) \neq 0$ il en existe un, tel que la suite des nombres

$$\Delta(p_1) = -1, \quad \Delta(p_1, p_2), \quad \Delta(p_1, p_2, p_3), \ldots, \quad \Delta(p_1, p_2, \ldots, p_{r+1})$$

ne contienne pas deux zéros consécutifs et que le nombre N des changements de signes qu'elle présente après la suppression des zéros éventuels satisfasse à l'inégalité

$$\frac{n+s}{2} + (r-n) \leqq N \leqq \frac{n+s}{2}.$$

Pour $s = n\ (= m)$ l'espace $E_{n,s}$ est évidemment l'espace euclidien réel à n dimensions, le nombre (1′) étant $\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2$ qui est toujours positif ou nul; on peut donc prendre comme distance (non négative) la racine carrée positive de cette expression. $E_{n,n}$ jouit en outre de la propriété que ses points sont métriquement distingués, c'est-à-dire que

$$p \neq q \text{ implique } \overline{pq}^2 \neq 0. \qquad (\Delta_3)$$

Un espace à distances non-négatives et qui distingue métriquement les points est ce que M. Fréchet avait appelé un espace E. Voici une conséquence importante de la condition (Δ_3): Une application d'un espace E sur un autre espace E conservant les distances est nécessairement biunivoque, c'est, comme nous dirons, une *congruence*. Un espace E qui peut être appliqué sur un sous-ensemble d'un espace E est donc applicable sur celui-ci au moyen d'une congruence et sera dit *congruent* à ce sous-ensemble [1].

[1] C'est ainsi que l'espace unitaire à n dimensions est congruent à l'espace euclidien réel à $2n$ dimensions.

Le résultat énoncé plus haut contient donc comme cas particulier le théorème suivant concernant l'espace euclidien réel $E_n (= E_{n,n})$:

Pour qu'un espace E *à distances non négatives et distinguant métriquement les points, soit congruent à un sous-ensemble de* E_n *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

(Δ_0^{n+3}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0$ *pour tout système de* $n + 3$ *points de* E,

(Δ_0^{n+2}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0$ *pour tout système de* $n + 2$ *points de* E,

(Δ^k) $sgn\, \Delta(p_1, p_2 \dots, p_k) = (-1)^{k+1}$ *ou* 0

pour tout système de k *points de* E, *où* $k = 2, 3, \dots, n + 1$.

Remarquons qu'un espace E contenant plus de $n + 3$ points et satisfaisant aux conditions (Δ^k) pour $k = 2, 3, \dots, n + 1$ et à (Δ_0^{n+2}) satisfait *eo ipso*[1] à la condition (Δ_0^{n+3}). Pour qu'un espace séparable E soit congruent à un sous-ensemble de l'espace de Hilbert il faut et il suffit que les conditions (Δ^k) soient satisfaites pour chaque entier k.

II. — La théorie de la convexité et ses relations avec la géométrie axiomatique.

Passons à l'étude de propriétés plus géométriques de l'espace et de ses sous-ensembles. Dans ce but nous considérons un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout couple d'éléments (« points ») p, q il corresponde un nombre réel $\overline{pq}$ (« distance » de p et q) qui satisfait à la condition $\overline{pp} = 0$ pour tout p et à l'inégalité triangulaire $\overline{pq} + \overline{qr} \geqq \overline{pr}$ pour chaque triplet de points. Nous appellerons un tel ensemble un *espace triangulaire.* Particulièrement importants sont les espaces triangulaires à distances symétriques, non négatives, et qui distinguent métri-

[1] Un espace à distances complexes satisfaisant à la condition (Δ_0^{n+2}) ne satisfait pas nécessairement à la condition (Δ_0^{n+3}). On trouvera une étude des systèmes de $n + 3$ points non congruents à $n + 3$ points de E_n bien que $n + 2$ quelconques de leurs points soient congruents à $n + 2$ points de E_n dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 124. J'ai appelé de tels systèmes *pseudo-euclidiens.*