Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET SES RELATIONS AVEC LES AUTRES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES

Autor: Menger, Karl

Kapitel: IV. — La courbure dans la géométrie des distances ET LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27321

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

un nombre sont garanties si l'ensemble de vecteurs est complet convexe et extérieurement convexe et jouit des propriétés (Γ^k).

Les recherches de MM. WILSON et BLUMENTHAL mentionnées à la fin du Chapitre II admettent de même une traduction dans le langage de l'algèbre des vecteurs. En particulier il découle du théorème de M. WILSON (p. 358), comme l'a remarqué M. BLUMENTHAL, qu'un ensemble de vecteurs séparable et complet est isomorphe à un espace vectoriel euclidien ou hilbertien si les conditions

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) \geqq 0 \text{ pour tout couple } \varphi_1, \varphi_2 \text{ de vecteurs} \qquad (\Gamma^2)$$

$$\Gamma(\varphi_1 \varphi_2, \varphi_3) \geqq 0 \text{ pour tout triplet } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \text{ de vecteurs} \qquad (\Gamma^3)$$

sont satisfaites ou, ce qui revient au même, si tout triplet de vecteurs est isomorphe à un triplet de vecteurs de E_n, résultat qui a été obtenu directement par MM. FRÉCHET, v. NEUMANN et JORDAN [1].

IV. — LA COURBURE DANS LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

Nous avons, dans les chapitres précédents, traité, en nous plaçant au point de vue de la géométrie des distances, des problèmes où l'espace et ses sous-ensembles interviennent globalement. Mais cette géométrie permet aussi l'étude des *propriétés locales* des variétés spatiales, et pénètre ainsi dans un domaine où a triomphé jusqu'alors brillamment et exclusivement la méthode analytique; cette méthode s'appliquait si bien à cette étude qu'on a fini par identifier la théorie des propriétés locales des figures avec la géométrie différentielle: application de l'analyse, surtout du calcul différentiel, aux modèles arithmétiques représentant les figures. Et même M. BOULIGAND qui a eu le mérite en créant sa Géométrie infinitésimale directe d'introduire l'analyse moderne, en particulier la théorie des fonctions de variable réelle, dans l'étude des propriétés géométriques locales — se borne à l'étude d'espaces où chaque point est (ou pourrait être) caractérisé par un système de coordonnées.

[1] *Annals of Mathem.*, 36, p. 705, p. 719.

L'idée d'une géométrie différentielle sans coordonnées semble encore aujourd'hui presque absurde à la plupart des géomètres; cependant la géométrie des distances a déjà résolu le problème si important de la courbure d'une façon qui laisse pressentir, comme nous le disions dans l'introduction, que la méthode analytique, bien qu'elle ait joué jusqu'alors un rôle prépondérant, n'est ni la seule possible, ni celle présentant le plus de généralité, ni peut-être même la plus conforme à la nature géométrique des problèmes.

Soit D un espace distancié, q, r, s trois de ses points, il existe trois points q', r', s' dans le plan euclidien tels que les triplets q, r, s et q', r', s' sont congruents. Si ρ désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle q', r', s', — en convenant de poser $\rho = \infty$ si q', r', s' sont en ligne droite — nous appellerons courbure du triplet q, r, s de l'espace distancié et nous désignerons par $\varkappa(q, r, s)$ l'inverse de ce rayon, c'est-à-dire $\frac{1}{\rho}$. Cette courbure sera nulle quand les trois points seront linéaires (p. 357) et seulement dans ce cas; et la propriété du segment due à M. Biedermann (p. 357) peut alors s'énoncer ainsi: Pour qu'un arc — c'est-à-dire un espace triangulaire homéomorphe à un segment — soit congruent à un segment, il faut et il suffit que tout triplet de points lui appartenant ait une courbure nulle.

Cet énoncé ne correspond pas à celui de la géométrie différentielle concernant les propriétés caractéristiques de la droite, qui fait intervenir une courbure définie en chaque point. Dans un espace distancié nous pouvons, cependant, aussi introduire une courbure *locale*, et cela de la façon suivante [1]: Nous dirons que D a la *courbure* $\varkappa(\mathrm{p})$ *au point* p, si à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que pour tout triplet q, r, s de points de D, dont la distance à p est $< \delta$, nous ayons $|\varkappa(q, r, s) - \varkappa(p)| < \varepsilon$.

On peut alors se demander si un arc dont la courbure est nulle en chaque point est congruent à un segment. Il n'en est pas nécessairement ainsi: Prenons pour D l'ensemble des points x

[1] Cette notion de courbure et sa théorie est développée dans mon mémoire: *Mathem. Annalen*, 103.

de l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ et comme distance des points x et y le nombre

$$|x - y| \text{ si } x \text{ et } y \text{ ont le même signe,}$$

$$|x| + |y| - x^2 y^2 \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires.}$$

D est alors un espace distancié homéomorphe au segment $-1 \leqq x \leqq 1$ de la droite euclidienne, dont la courbure est nulle en chaque point. Cependant cet arc n'est pas congruent à un segment, comme le montre la considération du triplet $-1, 0, 1$ dont les points ont deux à deux la même distance.

J'ai néanmoins démontré par des méthodes purement métriques qu'*un arc appartenant à un espace euclidien dont la courbure est partout nulle est un segment*, et ainsi fut établi un théorème de géométrie différentielle sans l'usage du calcul différentiel.

Comparé avec la définition classique de la courbure, la définition métrique est plus générale dans ce sens qu'elle s'applique aux espaces distanciés généraux. Mais dans le cas des espaces euclidiens MM. Haupt et Alt ont remarqué [1] que ma définition de la courbure était plus restrictive que la définition classique. Si l'arc $y = y(x)$ du plan euclidien admet au point $p_0 = (x_0, y_0)$ une courbure $\varkappa(p_0)$ au sens précédemment mentionné — disons une courbure métrique — la dérivée seconde $y''(x_0)$ existe et la courbure classique $\dfrac{y''(x_0)}{[1 + y'^2(x_0)]^{3/2}}$ est égale à $\varkappa(p_0)$. Inversement, un arc peut posséder au point $p_0 = (x_0, y_0)$ une courbure au sens classique $\dfrac{y''(x_0)}{[1 + y'^2(x_0)]^{3/2}}$ sans posséder une courbure métrique; celle-ci est en effet une fonction continue du point ce qui n'est pas nécessairement le cas pour la courbure classique, comme le montre l'exemple de la courbe $y = x^4 \sin \dfrac{1}{x}$ pour le point $p = (0,0)$.

M. Alt a modifié [2] de la façon suivante la notion de la courbure métrique: au lieu de considérer des triplets q, r, s où les trois points sont variables, il se borne à la considération des triplets

---

[1] Cf. *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 3, p. 4.

[2] Dans sa thèse présentée à Vienne. Voir aussi: *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 3, p. 5 et 4, p. 4.

p, q, r où deux points seuls sont variables. Il dit que D a la courbure $\varkappa(p)$ au point p, $\varkappa(p)$ étant un nombre fini, si à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que, pour tout couple de points q, r, dont la distance à p est $< \delta$, nous ayons $|\varkappa(p, q, r) - \varkappa(p)| < \varepsilon$. Cette définition (valable dans tout espace distancié) appliquée aux courbes d'un espace euclidien est un peu plus générale que la définition classique [1]. M. Alt a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $y = f(x)$ — où f est une fonction définie dans un voisinage de x_0 qui n'admet pas une dérivée infinie pour $x = x_0$ — possède au point $(x_0, y_0 = f(x_0))$ une courbure, à son sens, c'est que $f'(x_0)$ existe et que les deux expressions

$$\frac{\overline{f}(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{\underline{f}(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

tendent toutes deux vers une limite finie, ces deux limites étant égales [2], quand x tend vers x_0; $\overline{f}$ et $\underline{f}$ désignent respectivement la dérivée supérieure et inférieure de la fonction f (celles-ci pouvant prendre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$).

M. Pauc a montré récemment qu'en prenant comme définition de la dérivée seconde pour la valeur $x = x_0$, la limite finie, si elle existe, de l'expression

$$E(h, k) = \frac{\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \dfrac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k}}{\dfrac{(h - k)}{2}}$$

quand h et k tendent indépendamment l'un de l'autre vers 0, cette nouvelle définition coïncide avec la définition classique lorsque $f'(x)$ existe dans un voisinage de x_0. L'existence de

---

[1] M. Gödel a proposé la définition suivante qui est encore plus générale: Disons que l'arc D a la courbure $\varkappa(p)$ au point p, si à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que, pour tout couple de points q, r, *de part et d'autre de* p, dont la distance à p est $< \delta$, nous ayons $|\varkappa(p, q, r) - \varkappa(p)| < \varepsilon$.

[2] M. Pauc a remarqué que quand $f'(x_0)$ et les limites des deux expressions mentionnées existent, ces deux limites sont nécessairement égales; si A désigne leur valeur commune, la courbure de M. Alt a comme valeur $\dfrac{|A|}{[1 + f'^2(x_0)]^{3/2}}$.

$f''(x_0)$ dans ce sens entraîne l'existence de $f'(x_0)$ et celle de la courbure de M. Alt qui a alors comme expression $\frac{|f''(x_0)|}{[1+f'^2(x_0)]^{3/2}}$ [1].

M. Pauc a démontré par ailleurs que dans un espace euclidien, si un continu k quelconque admet en un point p_0 une courbure de Alt, un voisinage de p_0 sur k est un arc rectifiable; ce qui permet l'énoncé suivant qui nous rapproche de la définition classique: Pour qu'un continu k d'un espace euclidien possède en un point p_0 une courbure de Alt $= \varkappa(p_0)$ il faut et il suffit qu'un voisinage de p_0 sur k soit un arc rectifiable, admettant une tangente t_0 en p_0, et qu'en se limitant aux points p où la tangente t existe, l'expression $\Delta\alpha : \Delta s$ ($\Delta\alpha =$ angle tt_0, $\Delta s =$ longueur de l'arc pp_0) ait une limite égale à $\varkappa(p_0)$ lorsque p tend vers p_0.

Donnons un exemple d'un arc possédant en un point une courbure de Alt sans posséder une courbure classique. Il suffit de considérer les points $p_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ et $q_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) (situés sur la parabole $y = x^2$) et la somme de deux lignes polygonales $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots$ complétée par le point 0. L'arc obtenu possède en ce dernier point une courbure au sens de M. Alt, égale à 2; il ne peut posséder une courbure classique dans ce point, car la fonction $y = f(x)$ représentant cet arc possède dans tout voisinage de 0, des points où $f'(x)$ n'existe pas. La dérivée seconde au sens classique n'est pas définie pour $x = 0$, tandis qu'elle l'est au sens plus large mentionné plus haut.

Au point de vue de la métrique interne (p. 362) les arcs ne présentent qu'un intérêt assez faible. Un arc D satisfait aux trois conditions mentionnées (p. 363) s'il est rectifiable et dans ce cas seulement. Or, en faisant correspondre aux couples de points d'un arc rectifiable quelconque leur distance interne, nous obtenons un espace D′ congruent à un segment dont la longueur est égale à celle de l'arc, donc un espace dont la courbure est 0 en chaque point.

Par contre, l'intérêt de la métrique interne devient prépondérant pour les espaces de dimension supérieure, et déjà pour

[1] Il s'ensuit que la valeur A, rencontrée plus haut, n'est autre que $|f''(x_0)|$.

les surfaces. Si D est une surface comme celles que l'on considère dans la géométrie différentielle, il correspond à chaque point p de D un nombre $k(p)$ appelé la courbure totale de D au point p, à savoir le produit des deux courbures principales des sections planes de D. Ce nombre, d'après un résultat célèbre de GAUSS, ne dépend que de la métrique interne de D; si D_1 et D_2 sont deux surfaces telles que les espaces convexes D_1' et D_2', portant les métriques internes de D_1 et D_2, soient congruents, alors les nombres $k(p_1)$ et $k(p_2)$ sont toujours égaux pour deux points p_1 de D_1 et p_2 de D_2 qui se correspondent par cette congruence. On connaît, d'ailleurs, les nombreuses définitions de $k(p)$ se basant sur la métrique interne de D, dues à GAUSS et à ses successeurs. Mais n'est-il pas possible, demandais-je, de définir cette courbure par la simple considération des quadruplets de points de D, comme nous venons de faire pour la courbure des courbes ?

La plus simple généralisation de cette dernière qui se présente, ne mène pas à la solution du problème, même dans le cas où D est un sous-ensemble d'un espace euclidien; car si l'on fait alors correspondre à quatre points de D le rayon de la sphère circonscrite et si l'on fait un passage à la limite analogue à celui que nous avons employé pour les courbes, on obtient un nombre qui ne dépend pas uniquement de la métrique interne de D.

M. WALD a cependant réussi récemment à résoudre le problème au moyen de l'idée suivante [1]: Il dit que l'espace distancié D' a la *courbure de surface* $\varkappa(p)$ au point p, lorsqu'aucun voisinage de p n'est linéaire et lorsqu'à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un $\delta > 0$ tel que tout quadruplet de points q, r, s, t de D', dont les distances à p sont $< \delta$, soit congruent à un quadruplet de points de S_k avec $|k - \varkappa(p)| < \varepsilon$; S_k désigne la surface d'une sphère à trois dimensions de courbure totale $k = \frac{1}{r^2}$ (r rayon réel ou imaginaire) portant la métrique interne, donc où l'on a pris comme distance de deux points p' et p'' la longueur du plus petit arc de grand cercle passant par p'

[1] Cf. *C. R.*, 201, p. 918. Voir aussi: *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 6, p. 29 et cahier 7, p. 24.

et p''. Si D′ est une surface comme celles que l'on considère en géométrie différentielle, la courbure totale $k(p)$ en tout point p est égale à la courbure de surface $\varkappa(p)$ de D′ au point p. La définition de WALD qui ne nécessite pas la représentation des points par des coordonnées, peut donc servir à introduire de façon bien naturelle et extrêmement simple la notion importante de courbure.

Les surfaces de GAUSS sont donc des espaces compacts et convexes admettant en chaque point une courbure de surface $\varkappa(p)$ au sens de M. WALD. Mais encore plus important et plus remarquable est, me semble-t-il, le théorème inverse démontré par M. WALD.

Tout espace distancié compact et convexe qui admet une courbure de surface en chaque point, est une surface de GAUSS. En se basant sur la seule hypothèse qu'un espace distancié général est compact, convexe et admet en chaque point une courbure de surface au sens de M. WALD, celui-ci peut démontrer que l'espace est localement homéomorphe à l'intérieur d'un cercle, que deux points assez voisins peuvent toujours être joints par un seul segment, qu'on peut introduire des angles et des coordonnées polaires ρ, φ, et que la longueur d'un petit arc

$$\rho = \rho(t)\,,\ \varphi = \varphi(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

$\rho(t)$ et $\varphi(t)$ étant deux fonctions dérivables de t, est égale à

$$\int_0^1 \left[\rho'^2(t) + G^2(\rho, \varphi)\,\varphi'^2(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt\,,$$

où $G(\rho, \varphi)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2} = -\varkappa(\rho, \varphi)\,.\,G(\rho, \varphi)$$

satisfaisant aux conditions $G(0, \varphi) = 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial \rho}(0, \varphi) = 1$ et où $\varkappa(\rho, \varphi)$ désigne la courbure de surface de D′ au point (ρ, φ). On a donc le théorème fondamental suivant:

Pour qu'un espace distancié compact soit une surface de

Gauss, il est nécessaire et suffisant qu'il soit convexe et admette une courbure de surface en chaque point.

Ce théorème montre que la géométrie des distances fournit une nouvelle base à l'étude des propriétés métriques locales des surfaces.

V. — Géométrie des distances et calcul des variations.

Soit donné un espace distancié. Un ensemble fini ordonné de points $p_1, p_2, \ldots, p_k$ est appelé *polygone* (et polygone *fermé* si $p_1 = p_k$). Nous considérons des courbes continues dans l'espace donné. C étant l'image continue d'un intervalle $\alpha \leq t \leq \beta$, nous appelons sous-polygone de C l'image $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ (par la même représentation) d'un ensemble fini ordonné de nombres $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_k$ de $[\alpha, \beta]$. Par ν (P) nous désignons le plus grand des nombres $\gamma_{i+1} - \gamma_i$.

Soit donnée une fonction $F(p; q, r)$ des triplets de points $(q \neq r)$. Cette fonction permet l'introduction d'une nouvelle métrique si nous prenons pour chaque couple de points q, r, au lieu de la distance $\overline{qr}$ qu'ils ont dans D, le nombre $d(q, r) = F(q; q, r) \cdot \overline{qr}$ si $q \neq r$, et $d(q, q) = 0$. Soit D (F) l'espace à distances réelles qu'on obtient ainsi. En attribuant, étant donné un point p, à q et r la distance $d_p(q, r) = F(p; q, r)\overline{qr}$ si $q \neq r$, et $d_p(q, q) = 0$ nous obtenons un autre espace à distances réelles que nous appellerons l'espace tangent $D_p(F)$ de D (F) au point p. Pour le polygone P nous considérerons outre sa longueur $l(P) = \Sigma p_i p_{i+1}$ dans D, ses longueurs dans D (F) et dans $D_p(F)$, à savoir les nombres

$$\lambda(P, F) = \sum_{i=1}^{k-1} F(p_i ; p_i, p_{i+1}) \cdot \overline{p_i p_{i+1}} .$$

et

$$\lambda_p(P, F) = \sum_{i=1}^{k-1} F(p ; p_i, p_{i+1}) \overline{p_i p_{i+1}} .$$

La borne supérieure finie ou infinie des nombres $l(P)$ pour