Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET SES RELATIONS AVEC LES AUTRES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES

Autor: Menger, Karl

Kapitel: V. — Géométrie des distances et calcul des variations.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27321

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Gauss, il est nécessaire et suffisant qu'il soit convexe et admette une courbure de surface en chaque point.

Ce théorème montre que la géométrie des distances fournit une nouvelle base à l'étude des propriétés métriques locales des surfaces.

V. — Géométrie des distances et calcul des variations.

Soit donné un espace distancié. Un ensemble fini ordonné de points $p_1, p_2, \ldots, p_k$ est appelé *polygone* (et polygone *fermé* si $p_1 = p_k$). Nous considérons des courbes continues dans l'espace donné. C étant l'image continue d'un intervalle $\alpha \leq t \leq \beta$, nous appelons sous-polygone de C l'image $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ (par la même représentation) d'un ensemble fini ordonné de nombres $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_k$ de $[\alpha, \beta]$. Par ν (P) nous désignons le plus grand des nombres $\gamma_{i+1} - \gamma_i$.

Soit donnée une fonction $F(p; q, r)$ des triplets de points $(q \neq r)$. Cette fonction permet l'introduction d'une nouvelle métrique si nous prenons pour chaque couple de points q, r, au lieu de la distance $\overline{qr}$ qu'ils ont dans D, le nombre $d(q, r) = F(q; q, r) \cdot \overline{qr}$ si $q \neq r$, et $d(q, q) = 0$. Soit D (F) l'espace à distances réelles qu'on obtient ainsi. En attribuant, étant donné un point p, à q et r la distance $d_p(q, r) = F(p; q, r)\overline{qr}$ si $q \neq r$, et $d_p(q, q) = 0$ nous obtenons un autre espace à distances réelles que nous appellerons l'espace tangent $D_p(F)$ de D (F) au point p. Pour le polygone P nous considérerons outre sa longueur $l(P) = \Sigma p_i p_{i+1}$ dans D, ses longueurs dans D (F) et dans $D_p(F)$, à savoir les nombres

$$\lambda(P, F) = \sum_{i=1}^{k-1} F(p_i ; p_i, p_{i+1}) \cdot \overline{p_i p_{i+1}} .$$

et

$$\lambda_p(P, F) = \sum_{i=1}^{k-1} F(p ; p_i, p_{i+1}) \overline{p_i p_{i+1}} .$$

La borne supérieure finie ou infinie des nombres $l(P)$ pour

tous les sous-polygones de C est appelée la *longueur* $l(\mathrm{C})$ de C. On dit que C est *rectifiable* si $l(\mathrm{C})$ est fini.

Imposons à la fonction F les conditions suivantes pour chaque courbe rectifiable C:

1. F (p; q, r) *est bornée pour tous les triplets* p, q, r *d'un voisinage de* C.

2. *L'ensemble de tous les points* p *de* C *pour lesquels l'oscillation de* F *est* > 0, *est de mesure linéaire* 0, c'est-à-dire il peut être couvert par des sphères, en nombre fini ou infini, dont la somme des diamètres soit aussi petite que l'on voudra. Par l'oscillation $\sigma(p)$ de F au point p nous entendrons la borne supérieure de tous les nombres σ pour lesquels il existe dans tout voisinage de p quatre points p', p'', q, r tels que $|\mathrm{F}(p'; q, r) - \mathrm{F}(p''; q, r)| \geqq \sigma$. Les points pour lesquels $\sigma(p) > 0$, sont les points de discontinuité de F par rapport à la première des trois variables.

3. *L'ensemble des points* p *de* C *pour lesquels* $\tau_{\mathrm{C}}(p)$ *est* > 0 *est de mesure linéaire* 0. Par $\tau_{\mathrm{C}}(p)$ nous entendons la limite pour $\rho \to 0$ de la borne supérieure des nombres $\tau(q)$ pour les points q dont la distance à p est $< \rho$. Nous désignons ici par $\tau(q)$ la borne supérieure des nombres τ pour lesquels il existe un polygone $\mathrm{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ avec $p_1 = q$ et tel qu'on ait

$$\lambda_p(\mathrm{P}, \mathrm{F}) \leqq d(p_1, p_n) - \tau\,|d(p_1, p_n)|\,.$$

On a $\tau(p) \geqq 0$ pour tout point p et $\tau(p) = 0$ dans le cas et seulement dans le cas où

$$\mathrm{F}(p; p, q)\,\overline{pq} + \mathrm{F}(p; q, r)\,\overline{qr} \gtreqless \mathrm{F}(p; q, r)\,\overline{pr}$$

pour tout couple q, r.

4. $\tau_{\mathrm{C}}(p)$ *est fini en tout point* p *de* C.

5. *Pour tout polygone fermé* P *qui est assez voisin d'un point* p *de discontinuité de* F, *on a* $\lambda(\mathrm{P}, \mathrm{F}) \geqq 0$.

Ces hypothèses sur la fonction F étant admises on a le théorème suivant:

Pour chaque suite $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots$ *de sous-polygones d'une courbe continue rectifiable pour laquelle on a lim* $\nu(\mathrm{P}_n) = 0$, les nombres

$\lambda(P_n, F)$ *convergent vers un nombre fini. Cette limite est la même pour toutes les suites de sous-polygones de* C *assujetties à la condition que* $\nu \to 0$. *Nous la désignerons par* $\lambda(C, F)$. *Pour chaque* $\lambda > 0$ *donné,* $\lambda(C, F)$ *est une fonctionnelle semicontinue inférieurement sur l'ensemble de toutes les courbes de longueur* $\leqq \lambda$. *Si, d'ailleurs, pour chaque* $\lambda > 0$ *donné, les longueurs de toutes les courbes* C *pour lesquelles* $\lambda(C, F) \leqq \lambda$, *sont bornées, chaque classe complète de courbes rectifiables contient une courbe pour laquelle la fonctionnelle* $\lambda(C, F)$ *atteint son minimum.*

Quel est l'avantage de cette généralisation des théorèmes d'existence du calcul des variations ? Tout d'abord, la forme métrique met en évidence que l'hypothèse de la nature cartésienne de l'espace (à savoir la représentation des points par un groupe de coordonnées), hypothèse considérée jusqu'alors comme base des problèmes du calcul des variations, n'est pas liée à l'essence du problème. Dans tous les espaces distanciés se posent des questions concernant l'extremum des fonctionnelles de courbes, données par des intégrales curvilignes. Mais même en l'appliquant aux espaces euclidiens, donc au cas classique, notre théorème, outre une grande simplicité dans les démonstrations, semble apporter un progrès [1], car les conditions imposées à F même dans les profonds théorèmes de M. Tonelli sont plus restrictives que les nôtres. Considérons, pour nous en rendre compte, nos cinq hypothèses sur F dans le cas où l'espace distancié donné est un espace euclidien à n dimensions [2].

Dans les problèmes classiques, il correspond à chaque point $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de cet espace (ou d'un certain domaine) et à chaque direction $\delta = (x_1' : x_2' : \ldots : x_n')$ un nombre

$$F(p, \delta) = F(x_1, \ldots, x_n ; x_1', \ldots, x_n') = \frac{1}{k} F(x_1, \ldots, x_n ; kx_1', \ldots, kx_n')$$

$$\text{pour} \quad k > 0 .$$

[1] Je viens d'apprendre que dans le cas euclidien M. Bouligand a récemment (*Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liége*, 3me sér., t. 19) considéré, pour les fonctions continues et quasi-régulières partout, des sommes riemaniennes ainsi que nous venons de le faire dans le cas général, et a ainsi obtenu une démonstration très élégante d'un théorème d'existence. M. Bouligand, tout en se bornant aux fonctions positivement définies, s'est bien aperçu de la portée de sa méthode. La nôtre était en germe dans des recherches sur la longueur des arcs (*Mathem. Annalen*, 103) et nous l'avons exposée dans un article de *Fundam. Mathem.*, 25, et dans une note aux *C. R. Paris*, 21.X.1935.

[2] Cf. ma note, *C. R.*, 200, p. 705.

Pour appliquer notre théorie posons pour trois points p, q, r donnés $(q \neq r)$ $F(q; q, r) = F(p, \delta_{qr})$ où δ_{qr} désigne la direction de la demi-droite partant de q et passant par r. Les hypothèses 1 et 2 sont réalisées si, pour chaque courbe rectifiable C, la fonction $F(p, \delta_{qr})$ est *bornée dans un voisinage de* C et *continue sur* C *sauf pour les points d'un ensemble de mesure linéaire* 0, c'est-à-dire d'un ensemble qu'on peut recouvrir au moyen d'une suite dénombrable de sphères dont la somme des diamètres est arbitrairement petite. La quasi-régularité $\tau(p) = 0$ de la fonction F au point p (qui par la condition 3 est postulée pour presque tous les points p) s'exprime maintenant par l'inégalité suivante valable pour chaque triplet de points p, q, r:

$$F(p, \delta_{pq})\,\overline{pq} + F(p, \delta_{qr})\,\overline{qr} \geq F(p, \delta_{pr})\,\overline{pr}\,.$$

Pour voir la signification de cette propriété, nous désignons, pour chaque droite orientée δ passant par p, par e_δ le point de δ dont la distance à p est égale à $\frac{1}{|F(p, \delta)|}$ et qui est situé sur le rayon positif ou négatif de δ suivant le signe de $F(p, \delta)$, c'est-à-dire nous construisons l'*indicatrice* E de F au point p dans le sens où, pour des fonctions définies, M. Carathéodory l'a introduite. Pour que F soit quasi-régulière au point p, il faut et il suffit alors, comme l'a démontré M. Alt, qu'il existe une collinéation π qui transforme l'hypersurface indicatrice E du point p, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points e_δ, en une surface convexe à $n - 1$ dimensions π (E) telle que $\pi(p)$ soit situé à l'intérieur de π (E) et que $\pi(e_\delta)$ soit situé sur le semi-rayon positif de $\pi(\delta)$ par rapport à $\pi(p)$. Il est clair que la régularité de F au point p signifie la convexité projective de l'hypersurface indicatrice E du point p. Si $F(p, \delta)$ est non négative pour chaque droite δ passant par p, la convexité projective n'est rien d'autre que la convexité au sens ordinaire.

Remarquons en terminant que la méthode exposée permet aussi[1] d'étendre le champ des courbes de comparaison et l'introduction des courbes non rectifiables dans le calcul des variations[2].

---

[1] Cf. ma Note *C. R. Paris*, t. 202, p. 1648.

[2] Je tiens à remercier M. Pauc de son aide dans la rédaction de cet article et pour plusieurs remarques qu'il m'a communiquées à ce sujet.