Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES Les conditions définies en général. — Le cas hyperbolique
Autor: Hadamard, J.
Kapitel: V
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27304

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Autrement dit, nous sommes ici en présence d'un *problème mixte* [1]. Il en sera ainsi toutes les fois que, parmi les frontières limitant la région de définition de l'inconnue u, il y en aura d'orientées dans le temps, comme c'est le cas pour S_2.

Les équations du type elliptique gouvernent les phénomènes d'équilibre (équilibre électrique, élastique, calorifique, etc.). Les équations du type hyperbolique normal gouvernent les phénomènes du mouvement ou, plus généralement, d'état variable avec intervention d'inertie ou de phénomène équivalent (inertie électro-magnétique), inertie grâce à laquelle les perturbations introduites dans le mouvement se propagent en général par ondes, c'est-à-dire, en langage mathématique, par caractéristiques.

Une seule exception à cet égard: les liquides parfaits. Dans ce cas, entièrement théorique d'ailleurs, le mouvement obéit à l'équation des potentiels (5), l'absence de caractéristiques réelles correspondant au fait que toute perturbation se propage de manière instantanée dans toute la masse, et non par ondes.

Mais, même dans ce cas du liquide incompressible parfait, l'influence de l'inertie sur le caractère du phénomène se manifeste dès qu'il y a une surface libre, surface dont on a à étudier le mouvement. Un beau et important Mémoire de M. Volterra [**42**] montre (du moins en ce qui concerne les petites oscillations) qu'on a alors affaire à un problème mixte: les parois mouillées introduisent des conditions aux limites analogues à celles de Dirichlet — d'une manière précise, des conditions de Neumann —, mais, à la surface libre, on a des conditions initiales (relatives à l'origine des temps) qui sont du type de Cauchy [2].

V

Le cas parabolique est celui qui se présente pour l'état variable de la propagation de la chaleur, laquelle se fait sans inertie, et

---

1 Cette catégorie de « problèmes mixtes » est complètement différente de celle dont nous avons vu l'intervention dans le cas elliptique. Il serait utile d'introduire, pour deux idées aussi nettement distinctes, deux dénominations différentes.

2 L'équation des potentiels s'applique au mouvement considéré dans toute la masse du liquide. Mais si, comme il est naturel de le faire en l'espèce, on porte son attention sur ce qui se passe à la surface libre, en prenant pour inconnue par conséquent l'altitude z de cette surface en fonction de x, y, t, on est conduit, comme nous l'avons fait voir précédemment [**20***e*], à une équation intégro-différentielle, que ses propriétés rapprochent visiblement du type hyperbolique.

aussi dans l'étude des phénomènes (mouvement des fluides visqueux) où des résistances passives masquent en quelque sorte l'inertie (et à la limite, pourraient en annuler complètement l'effet).

Ce cas sera traité dans un exposé suivant. Sans entrer, par conséquent, dans son examen, disons que le rôle qui, pour le cas elliptique, était dévolu aux fonctions analytiques, appartient ici (au moins en ce qui concerne les conditions de possibilité du problème de Cauchy) aux fonctions que MM. GOURSAT et GEVREY [**18***a*, **17**] ont appelées fonctions de classe 2, en appelant, d'une manière générale, « fonctions de classes α » ($\alpha > 1$) celles dont les dérivées existent pour tous les ordres et satisfont aux inégalités [1]

$$| h^{(p)}(x) | < \frac{M \Gamma(\alpha p)}{\rho^p}$$

où M et ρ sont deux nombres positifs indépendants de l'indice p de dérivation (mais pouvant varier d'une fonction de la classe considérée à l'autre).

Le problème que nous envisageons ici enrichit ainsi la Théorie des fonctions de variables réelles, délimitant, parmi ces fonctions, des catégories nouvelles et intéressantes. En particulier, on est ainsi conduit à la notion de *fonction quasi-analytique*, si remarquablement élucidée par les célèbres travaux de MM. BOREL, DENJOY, CARLEMAN et, à un point de vue un peu différent, de M. SERGE BERNSTEIN: les classes α, pour $\alpha > 1$, se distinguent, en effet, complètement, à ce point de vue, de celle qui correspond à $\alpha = 1$, c'est-à-dire de celle des fonctions analytiques; elles ne sont que quasi-analytiques, le prolongement analytique n'étant pas déterminé.

Ce n'est pas le seul problème relatif aux fonctions de variables réelles qui se pose à propos de la théorie qui nous occupe. Indiquons en un qui n'est pas encore résolu ou, du moins, qui demanderait à être « plus résolu » suivant la parole célèbre de Poincaré. Nous avons dit que pour l'équation des ondes sphériques le

---

[1] Il est remarquable que des inégalités du même type, mais avec $\alpha < 1$, se soient également introduites en Analyse: ce sont elles qui caractérisent les fonctions entières de genre fini.

problème de Cauchy, lorsque les données en sont portées par l'hyperplan $t = 0$, est correctement posé, ainsi que le fait prévoir son interprétation physique. Mais il en est tout autrement lorsque, l'équation aux dérivées partielles restant la même, on prend les données de Cauchy le long d'une multiplicité orientée dans le temps, par exemple de l'hyperplan $x = 0$, soit

$$u(0, y, z, t) = g(y, z, t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z, t) = h(y, z, t).$$

Pour montrer que le problème de Cauchy ainsi posé ne l'est pas en général correctement, il suffit de considérer le cas où les fonctions g, h sont indépendantes de t. Il devra alors en être de même pour la solution si elle existe (en vertu du théorème d'unicité sur lequel nous reviendrons plus loin), de sorte que celle-ci devra satisfaire à l'équation (5), pour laquelle nous avons vu que le problème est, en général, impossible. Mais, comme dans les cas précédents, il est intéressant d'aller plus loin et, supposant, par exemple, la première donnée g nulle, de chercher comment il faudra choisir la seconde. Nous avons obtenu [**20***g*] un système de conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir cette dernière pour que le problème admette une solution: en particulier, la fonction cherchée, quoique n'étant pas forcément dérivable, admet nécessairement, et un nombre infini de fois, une série d'opérations dans lesquelles les différentiations par rapport à y et à z alternent avec des quadratures par rapport à t. Mais la réponse est donnée sous une forme qui laisse beaucoup à désirer sous le rapport de la simplicité et qui, de plus, manque d'un caractère essentiel, à savoir l'invariance par rapport aux transformations linéaires (transformations de Lorentz) qui conservent l'équation aux dérivées partielles.

Il y a donc là un problème nouveau de théorie des fonctions de variables réelles; et ce problème se distingue de tous ceux qui ont été posés jusqu'ici dans cet ordre d'idées par le fait de ne prendre naissance que pour les fonctions de deux variables au moins. Si, en effet, les données de Cauchy n'avaient à dépendre que d'une variable, c'est que l'équation aux dérivées partielles n'en mettrait en jeu que deux et, dans ce cas, la distinction entre

variétés d'espace et variétés de temps tombe: dans l'équation des cordes vibrantes ou des tuyaux sonores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ , \qquad (9')$$

les variables x et t jouent un rôle entièrement analogue.

VI

Ce cas de deux variables indépendantes dans lequel l'équation, supposée linéaire et hyperbolique, peut s'écrire sous la forme connue de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = \varphi(x, y) \qquad (11)$$

a été serré de plus près au point de vue qui nous occupe [1]. La remarque initiale est celle de M. Picard [**33***c*], d'après laquelle les données de Cauchy ne sont pas admissibles sur un arc de courbe le long duquel les deux coordonnées x, y ne sont pas toutes deux monotones. Si, par exemple, x est monotone, mais que y ait un maximum, on a une figure telle que celle qui est représentée fig. 1 et, dans ce cas, conformément à ce qui précède, les problèmes correctement posés sont des problèmes mixtes (données de Cauchy sur un des arcs partiels, une seule donnée en chaque point sur l'autre).

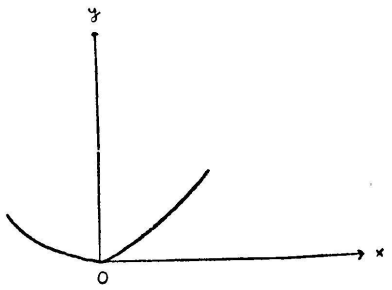

Fig. 1.

Un cas limite de la figure précédente est celui dans lequel, l'un des arcs partiels étant quelconque (quoique sans extremum de

---

[1] Certains des résultats dont nous allons parler ont été d'ailleurs étendus à des équations à plus de deux variables [**25**, **37***a*, **37***b*].

La récente théorie unitaire du champ de gravitation et d'électromagnétisme de M. Einstein [**15**] pose une question relative à la compatibilité de certains systèmes aux dérivées partielles. Cette question a été complètement élucidée par M. Cartan [**8**], mais dans l'hypothèse analytique. Il serait intéressant de se débarrasser de cette hypothèse, ainsi qu'on en doit présumer la possibilité, étant donné que les caractéristiques du système sont réelles.