Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES Les conditions définies en général. — Le cas hyperbolique

Autor: Hadamard, J.

Kapitel: VII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27304

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ses *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles* [**33***d*], assigner les données que l'on peut choisir le long de contours plus compliqués, où chacune des deux coordonnées peut présenter un nombre arbitraire de maxima ou de minima.

VII

Un cas particulièrement intéressant est celui d'un contour fermé. Pour ne pas multiplier à l'excès les hypothèses possibles, bornons-nous au cas d'un contour convexe, ou tout au moins le long duquel chacune des coordonnées caractéristiques n'admet

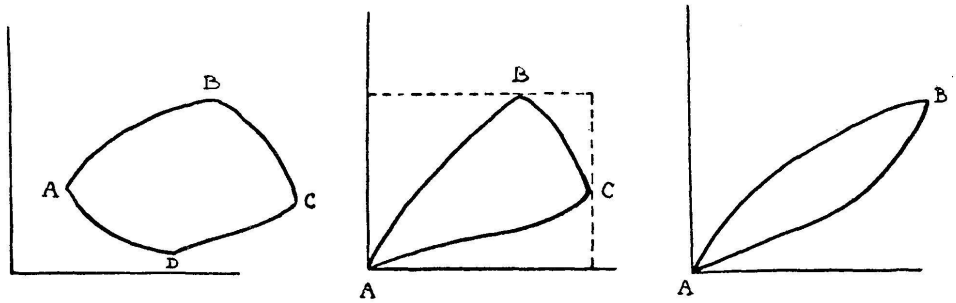

Fig. 3. Fig. 3 *bis*. Fig. 3 *ter*.

qu'un seul maximum et un seul minimum. Avec M. Huber [**24**], employons le mot *angle*, en le détournant de son sens habituel, pour désigner l'un des points qui correspondent à de tels maxima ou minima. Notre contour sera donc en général un quadrangle ABCD (fig. 3), mais pourra aussi se réduire à un triangle ABC (fig. 3*bis*) ou même à un biangle AB (fig. 3*ter*). Dans le premier cas, les résultats généraux montrent qu'une solution de l'équation est déterminée si on se donne:

les données de Cauchy sur l'un des arcs partiels, BC, par exemple;
une seule donnée sur les deux arcs adjacents AB, CD;
rien sur le quatrième arc AD.

Une question se pose alors d'elle-même. Peut-on, le long d'un tel contour fermé, se poser pour l'équation (11) le problème qui intervient dans le cas elliptique, à savoir le problème de Dirichlet ?

Comme l'a remarqué M. Sommerfeld [**39***a*], ce point a attiré l'attention de Du Bois Reymond lui-même dans le travail fondamental [**12**] où, comme on sait [**10**, t. II], il reprend et généralise la méthode d'intégration de Riemann. Les deux auteurs dont nous venons de parler considèrent d'ailleurs comme probable qu'en effet, de telles données de Dirichlet peuvent être encore choisies dans le cas de l'équation hyperbolique (11).

Or la réponse est toute contraire. Pas plus que le problème de Cauchy ne convient au type elliptique, le problème de Dirichlet ne peut se poser pour le cas hyperbolique.

La manière la plus immédiate de le constater est de prendre pour contour portant les données un rectangle parallèle aux axes, c'est-à-dire à côtés caractéristiques. Ainsi qu'il est classique [**10**, t. II], une inconnue u, solution de l'équation (11), est déterminée dans tout ce rectangle si l'on donne ses valeurs le long de deux côtés adjacents: aucune donnée relative aux deux autres côtés ne peut donc être jointe à celles-là.

Considérons les autres formes possibles du contour. La réponse peut encore être donnée aisément en ce qui regarde un biangle ou un triangle. Dans ce dernier cas (fig. 3*bis*), nous savons que la connaissance des valeurs de u sur les deux côtés AB, AC suffit à déterminer cette fonction dans tout le rectangle circonscrit, donc aussi sur le troisième côté BC.

Le cas du biangle demande un peu plus d'attention. Reprenons, pour un instant, la figure 2. Les valeurs de u étant données le long de AB, AC, le calcul de cette fonction en un point P conduit [**20***d*] à tracer deux lignes brisées $PQ_1 Q_2 \ldots$, $PR_1 R_2 \ldots$ à côtés caractéristiques (et tous dirigés dans le sens des x ou des y décroissants, si les arcs donnés AB, AC sont dans l'angle positif des parallèles aux axes menées par A), inscrites à l'angle formé par les deux arcs donnés, lignes polygonales qui tendent évidemment toutes deux vers le point A. La valeur de u en P, *cette fonction étant assujettie à être continue en* A, s'exprime par une somme de termes dont les uns sont proportionnels aux valeurs données aux sommets des lignes polygonales et les autres sont des intégrales définies le long des arcs partiels en lesquels ces sommets décomposent AB ou AC. Tout ceci reste valable lorsque les extrémités B, C des deux arcs issus de A coïncident, c'est-à-dire

lorsque la figure devient le biangle AB de la figure 3*ter*. Mais s'il en est ainsi, l'*expression ainsi formée est discontinue en* B : il est clair, en effet, qu'à deux points P, P′ très voisins l'un de l'autre et de B correspondent, par le tracé qui vient d'être indiqué, deux lignes polygonales très différentes entre elles.

On pourrait, de même, former, pour le même problème, une solution continue en B ; mais elle serait alors discontinue en A.

Reste le cas du quadrangle. Nous en avons précédemment [**20***f*] traité un exemple simple, celui d'une ellipse quelconque, l'équation aux dérivées partielles étant simplement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0 \ . \tag{11'}$$

Cette équation, en raison de la forme bien connue de son intégrale générale, possède cette propriété que tout rectangle ABCD parallèle aux axes donne lieu, pour l'une quelconque u de ses solutions, à la relation

$$u_A + u_C = u_B + u_D \ . \tag{12}$$

Plus généralement, toute ligne polygonale fermée à côtés parallèles aux axes donne lieu à une relation de même forme entre les sommes de valeurs de u prises l'une aux sommets de rangs pairs, l'autre aux sommets de rangs impairs.

Dès lors, si l'ellipse E a ses axes parallèles aux axes de coordonnées, en particulier si elle est un cercle, on peut y inscrire une infinité de rectangles donnant lieu chacun à la relation (12), ce qui fait apparaître immédiatement l'impossibilité de se donner les valeurs de u en tous les points d'une telle ellipse. Plus généralement, si l'ellipse E est telle qu'on peut y inscrire une ligne polygonale fermée à côtés parallèles aux axes, on peut lui en inscrire une infinité d'autres, d'où encore une infinité de conditions de possibilité du problème. Il en sera ainsi si un certain argument h est commensurable avec π.

Si l'argument h est incommensurable avec π, les impossibilités apparaissent sous une autre forme, à savoir par la divergence de séries trigonométriques susceptibles de représenter la fonction de x et la fonction de y qui figurent dans l'intégrale générale (ou,

plus rigoureusement, par le fait que les constantes de Fourier correspondantes ne sont plus nécessairement bornées).

Certaines de ces considérations ont été notablement généralisées dans le travail de M. Huber. Ce que nous avons noté dans le cas du cercle s'étend de soi-même à un « deltoïde » quelconque, c'est-à-dire à tout quadrangle dans lequel on peut inscrire une infinité de rectangles parallèles aux axes.

On peut évidemment construire un tel deltoïde si l'on s'en donne trois côtés (sans fixer les extrémités libres des côtés extrêmes). La ligne qui fermera le deltoïde (fig. 4) sera alors le lieu du quatrième sommet d'un rectangle inscrit s'appuyant sur les trois côtés donnés.

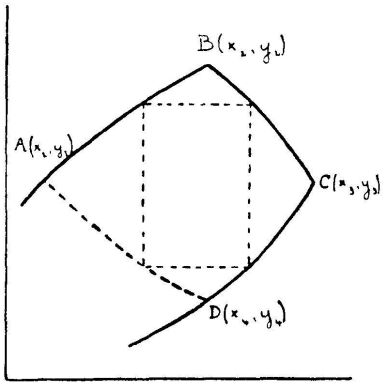

Fig. 4.

Pour tout deltoïde, il est clair que les valeurs de u ne peuvent être choisies que sur trois côtés seulement, celles qui sont relatives au quatrième s'en déduisant par l'égalité rectangulaire (12). Par contre, les données étant ainsi choisies, le problème de Dirichlet, qui devient ainsi possible, devient indéterminé. Ce fait, qui apparaît aisément sur le cercle [**20***g*], [**24**], se constate pour un deltoïde quelconque en remarquant qu'aux valeurs de u sur trois côtés on peut adjoindre celles de sa dérivée transversale sur le côté médian [1].

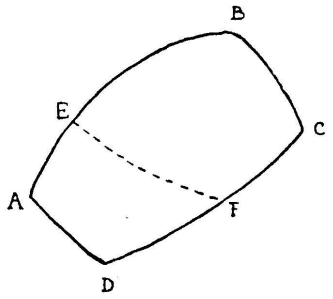

Fig. 5.

Soit maintenant un quadrangle ABCD qui ne soit pas un deltoïde: on peut, avec M. Huber, transformer le problème de plusieurs façons, en formant (fig. 5), par la construction précédente, un deltoïde BCEF ayant trois côtés communs avec le quadrangle donné. Les valeurs de u le long de EF étant connues d'après ce que nous venons de dire, on est

[1] On peut encore aisément former une solution de (11′) s'annulant sur tout le périmètre du deltoïde de la figure 4 sans être identiquement nulle, de la manière suivante. Désignant par A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_1), D (x_2, y_4) les quatre sommets, on choisira arbitrairement, dans l'intervalle (x_1, x_2), le premier terme $\varphi(x)$ de la valeur de u, après quoi le second terme $\psi(y)$ sera défini, dans l'intervalle (y_1, y_2), par la condition que

ramené à un problème de Dirichlet relatif, suivant la disposition de la figure, à un biangle, à un triangle ou à un quadrangle. Dans les deux premiers cas, l'impossibilité du problème (pour des données arbitraires) est démontrée [1].

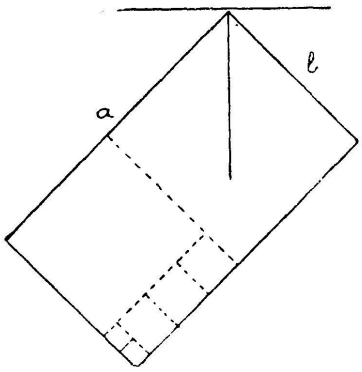

Fig. 6.

Si ADEF est à nouveau un quadrangle, l'opération pourra être recommencée. Mais la discussion devient alors difficile en raison de la multiplicité des cas de figure possibles et il peut arriver que les opérations se continuent indéfiniment sans aboutir [2].

La question n'est donc pas complètement élucidée, en toute rigueur, pour le cas d'un quadrangle. De plus, tout ce que nous avons dit concernant ce cas ne vaut que pour l'équation (11′), la seule qui donne lieu à une égalité rectangulaire de la forme (12).

VIII

Les principes précédents ont déjà [**25***a*, **37***a*, **23***b*, *c*, **43**] reçu des généralisations étendues relatives aux équations d'ordre supérieur *totalement hyperboliques*, c'est-à-dire, pour le cas des deux variables indépendantes, telles que l'équation aux coefficients angulaires des caractéristiques ait toutes ses racines réelles

---

$\varphi(x) + \psi(y)$ s'annule sur le côté AB ; puis les conditions analogues relatives aux côtés BC, CD détermineront $\varphi(x)$ dans l'intervalle (x_2, x_3), puis $\psi(y)$ dans l'intervalle (y_4, y_1). La somme $\varphi(x) + \psi(y)$ ainsi formée, nulle, sur AB, BC, CD, le sera aussi sur DA, en vertu de l'identité rectangulaire.

[1] M. Huber conclut à la possibilité du problème dans le cas du biangle et dans ceux qui s'en déduisent par la transformation indiquée dans le texte. Nous avons dit plus haut la raison qui nous fournit une conclusion contraire.

[2] Prenons, par exemple, pour notre quadrangle, un parallélogramme ayant ses côtés a, b symétriquement inclinés sur les axes (fig. 6). Un tel parallélogramme est un deltoïde s'il est un losange. Dans le cas contraire, soit $a > b$, la construction de M. Huber revient à tracer, autant de fois que possible, à l'intérieur du parallélogramme donné, des losanges successifs adjacents les uns aux autres, jusqu'à ce que la bande parallélogramme restante, s'il y en a une, ait son côté parallèle à a plus petit que celui qui est parallèle à b. Opérant de même (mais avec interversion des rôles de a et de b) sur cette bande, et continuant ainsi, il est aisé de voir que cette suite d'opérations est celle même qui détermine, par l'algorithme d'Euclide, la commune mesure à a et à b. Elle se termine donc si cette commune mesure existe (d'où des conditions de possibilité du problème) et continue indéfiniment dans le cas contraire.

Dans ce dernier cas, une discontinuité devra, en général, se manifester au sommet au voisinage duquel les losanges partiels viennent s'accumuler.