VIII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ramené à un problème de Dirichlet relatif, suivant la disposition de la figure, à un biangle, à un triangle ou à un quadrangle. Dans les deux premiers cas, l'impossibilité du problème (pour des données arbitraires) est démontrée [1].

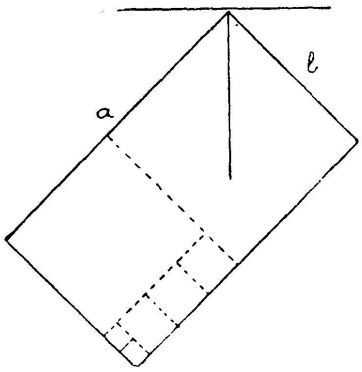

Fig. 6.

Si ADEF est à nouveau un quadrangle, l'opération pourra être recommencée. Mais la discussion devient alors difficile en raison de la multiplicité des cas de figure possibles et il peut arriver que les opérations se continuent indéfiniment sans aboutir [2].

La question n'est donc pas complètement élucidée, en toute rigueur, pour le cas d'un quadrangle. De plus, tout ce que nous avons dit concernant ce cas ne vaut que pour l'équation (11′), la seule qui donne lieu à une égalité rectangulaire de la forme (12).

VIII

Les principes précédents ont déjà [**25***a*, **37***a*, **23***b*, *c*, **43**] reçu des généralisations étendues relatives aux équations d'ordre supérieur *totalement hyperboliques*, c'est-à-dire, pour le cas des deux variables indépendantes, telles que l'équation aux coefficients angulaires des caractéristiques ait toutes ses racines réelles

---

$\varphi(x) + \psi(y)$ s'annule sur le côté AB ; puis les conditions analogues relatives aux côtés BC, CD détermineront $\varphi(x)$ dans l'intervalle (x_2, x_3), puis $\psi(y)$ dans l'intervalle (y_4, y_1). La somme $\varphi(x) + \psi(y)$ ainsi formée, nulle, sur AB, BC, CD, le sera aussi sur DA, en vertu de l'identité rectangulaire.

[1] M. Huber conclut à la possibilité du problème dans le cas du biangle et dans ceux qui s'en déduisent par la transformation indiquée dans le texte. Nous avons dit plus haut la raison qui nous fournit une conclusion contraire.

[2] Prenons, par exemple, pour notre quadrangle, un parallélogramme ayant ses côtés a, b symétriquement inclinés sur les axes (fig. 6). Un tel parallélogramme est un deltoïde s'il est un losange. Dans le cas contraire, soit $a > b$, la construction de M. Huber revient à tracer, autant de fois que possible, à l'intérieur du parallélogramme donné, des losanges successifs adjacents les uns aux autres, jusqu'à ce que la bande parallélogramme restante, s'il y en a une, ait son côté parallèle à a plus petit que celui qui est parallèle à b. Opérant de même (mais avec interversion des rôles de a et de b) sur cette bande, et continuant ainsi, il est aisé de voir que cette suite d'opérations est celle même qui détermine, par l'algorithme d'Euclide, la commune mesure à a et à b. Elle se termine donc si cette commune mesure existe (d'où des conditions de possibilité du problème) et continue indéfiniment dans le cas contraire.

Dans ce dernier cas, une discontinuité devra, en général, se manifester au sommet au voisinage duquel les losanges partiels viennent s'accumuler.

et distinctes et, si le nombre des variables est supérieur à deux [**40**, **22**], telles que le cône caractéristique se compose de nappes toutes réelles et emboîtées les unes dans les autres.

Le cas des équations totalement elliptiques (caractéristiques toutes imaginaires), lequel ne rentre pas dans le cadre de la conférence actuelle, a été, comme on sait, traité par E. E. Levi.

Mais d'autres circonstances sont possibles, et, quoique non imposées par les applications, soulèvent des problèmes intéressants.

C'est d'abord le cas du *type mixte* étudié, sur une suggestion de M. Volterra, par M. Tricomi [**41**]. Dans l'équation linéaire

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + H\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\ , \qquad (13)$$

les coefficients A, B, C, ... sont, en général, des fonctions x, y et il en est de même, par conséquent, de la quantité $AC - B^2$. Rien n'empêche donc que cette quantité ne puisse changer de signe suivant la position du point (x, y) dans le plan et, par conséquent, que l'équation soit tantôt elliptique, et tantôt hyperbolique. On peut, bien entendu, toujours, par une transformation ponctuelle, faire que la ligne de démarcation soit l'axe des x et, par conséquent, on obtient déjà un degré assez grand de généralité en s'adressant à l'équation

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \qquad (14)$$

qui est elliptique pour $y > 0$ et hyperbolique dans la région située au-dessous de l'axe des x. Dans cette dernière, on constate que l'équation peut se ramener à l'équation classique d'Euler et de Poisson (**10**] (la ligne singulière des coefficients entrant, toutefois, en ligne de compte: elle correspond précisément à l'axe des x). Grâce à cette circonstance, M. Tricomi, par une étude d'ailleurs très délicate, mais qui a été simplifiée sur un point par M. Holmgren [**23***e*], arrive à montrer que l'on peut déterminer une solution de l'équation (14) par les données suivantes (fig. 7):

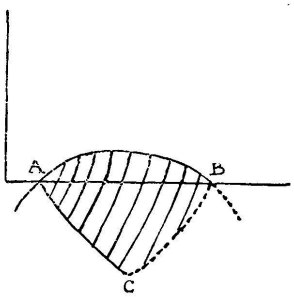

Fig. 7.

valeurs de u sur un arc AB ayant pour corde l'axe des x et situé dans la région elliptique;

valeurs de la même quantité sur un arc de caractéristique[1] issu de A et limité à la caractéristique analogue issue de B,

la région où u est ainsi déterminé étant celle qui est limitée par l'arc supérieur et les deux caractéristiques.

L'équation un peu plus générale

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ,$$

réductible également à celle d'Euler et de Poisson, se traite d'une manière analogue: elle est de type mixte si l'entier m est impair; elle a été également étudiée pour m pair, où elle est partout de type elliptique, sauf le long de l'axe des x où elle a le caractère parabolique.

Si maintenant l'équation est d'ordre supérieur, elle peut participer des deux types en étant de *type composite*, c'est-à-dire en ayant, en chaque point, des caractéristiques dont les unes seront réelles, les autres imaginaires. La plus simple des équations de cette nature est l'équation du troisième ordre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 .$$

D'après le caractère elliptique de cette équation, il est à prévoir que le problème de Cauchy, consistant à se donner, pour $x = 0$, les valeurs de u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ doit être en général impossible; et c'est ce que l'on voit effectivement en prenant pour inconnue la quantité $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, assujettie à être harmonique. On a un problème correctement posé en se donnant les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$ le long d'un contour fermé rencontré en deux points et deux seulement par une parallèle à l'axe des x, et les valeurs de u le long de l'un des deux arcs compris entre les points d'ordonnées extrêmes[2].

---

[1] A et B sont, pour les caractéristiques correspondantes, des points de rebroussement.

[2] On connaîtra ainsi, en effet, par la résolution d'un problème de Dirichlet, la fonction harmonique $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, après quoi il restera à opérer une quadrature par rapport à x, à partir de l'un des deux points où une parallèle à l'axe des x coupe le contour.

Soit maintenant l'équation du quatrième ordre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0\,, \qquad (15)$$

laquelle peut évidemment aussi s'écrire

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y}=\frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right)=0\,. \qquad (15')$$

Pour la même raison que tout à l'heure, on ne peut pas se poser le problème de Cauchy relatif à $x = 0$. Mais il est également impossible de se poser, comme pour l'équation totalement elliptique (6), le problème « biharmonique », c'est-à-dire de se donner, le long d'un contour fermé, les valeurs de u et de sa dérivée normale. Cela se voit d'une manière particulièrement simple en prenant l'équation sous la forme (15′) et, pour contour, un rectangle parallèle aux axes des X et des Y. Un système de données admissibles sera alors:

la dérivée normale tout le long du périmètre du rectangle;
les valeurs de u le long de deux côtés adjacents (avec des relations de concordance évidentes aux extrémités de ces côtés).

La première série de données fournit en effet, par dérivation, les valeurs au contour de la fonction harmonique

$$s=\frac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y} \qquad (16)$$

et, celle-ci une fois calculée, la seconde série de données est bien celle qui convient à la détermination d'une solution de l'équation (16).

Le cas d'un contour circulaire, bien que ne se traitant pas avec la même simplicité, donne lieu à la même conclusion: les données biharmoniques n'y sont pas admissibles.

D'autres formes de contours — par exemple, l'équation étant prise sous la forme (15), un contour fermé comprenant (fig. 7) un segment d'axe des y — suggèrent encore d'autres systèmes de données [**20***j*], les conclusions à cet égard restant, toutefois, insuffisamment établies.