Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE

Autor: Doetsch, Gustav

Kapitel: IV. — Les principes de Huyghens et d'Euler.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27305

ment négative, tandis que pour $\psi(x, y)$ la température passe pour $x = 0$ des valeurs négatives aux valeurs positives. Mais ceci s'explique du fait que les deux solutions correspondent à des conditions aux limites différentes pour $x \to \infty$. L'influence des *conditions aux limites à l'infini* et la question dans quelle mesure celles-ci peuvent être données n'a pas été jusqu'à maintenant étudiée dans la littérature.

IV. — Les principes de Huyghens et d'Euler.

1. — La non-unicité oblige à prendre des précautions surtout dans l'application aux solutions d'équations paraboliques du principe de Huyghens et de celui d'Euler. Le *principe de Huyghens* (Hadamard [1]) détermine la solution une fois à partir de la frontière primitive, puis à partir d'une station intermédiaire. L'exemple le plus simple serait le suivant: Soit un fil, de température initiale nulle, qui s'étend d'un côté à l'infini; appliquons à la frontière $x = 0$ la température un, alors; d'après (3, 61) nous obtenons pour $x > 0$ la température

$$1 * \psi(x, y) .$$

Si l'on prend comme frontière le point intermédiaire x_0 $(0 < x_0 < x)$, on y a la température $1 * \psi(x_0, y)$, donc dans x

$$1 * \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) .$$

Dans le cas de l'unicité on en peut conclure

$$1 * \psi(x, y) = 1 * \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) ,$$

d'où, par dérivation par rapport à y,

$$\psi(x, y) = \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) \qquad (0 < x_0 < x) .$$

Ceci n'est autre que le théorème d'addition de Cesàro, mentionné à la page 65. Mais la conclusion n'est pas légitime, si nous ne possédons pas de théorème d'unicité, rigoureusement applicable dans ce cas.

Si dans la fonction de Green G de (1, 24) nous mettons en évidence la largeur l de l'intervalle en écrivant $G(x, y; l)$, alors le principe de Huyghens appliqué à la propagation de la chaleur dans un fil fini, donne lieu à la relation

$$G(x, y; l) = G(x_0, y; l) * G(x - x_0, y; l - x_0) \qquad (0 < x_0 < x < l)$$

qui, explicitement écrite, représente une relation assez compliquée entre des fonctions ϑ_3 (Doetsch [11]).

Si l'on applique le principe de Huyghens dans la direction des y au lieu de celle des x, on obtient pour la fonction $\Gamma(x, \xi; y)$ de (1, 25) le théorème transcendant d'addition (Doetsch [1], p. 51):

$$\int_0^l \Gamma(x_1, \xi; y_1)\, \Gamma(\xi, x_2; y_2)\, d\xi = \Gamma(x_1, x_2; y_1 + y_2)$$

$$\text{pour} \quad 0 < \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} < l \qquad \text{et} \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} > 0 .$$

2. — *Le principe d'Euler* (Doetsch [9]) détermine une solution dans le même domaine de base au moyen de deux espèces de conditions sur la frontière, par exemple une fois par les valeurs sur la frontière de la fonction elle-même, puis par celles d'une de ses dérivées. On obtient ainsi par identification une relation en général transcendante. Envisageons par exemple (Doetsch [9], p. 340) la distribution de la température dans un fil de longueur un, distribution qui satisfait aux conditions suivantes sur la frontière

$$\lim_{y \to 0} u = 0 , \qquad \lim_{x \to 0} u = 2y\, \vartheta_3(0, y) + 1 , \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

Elle sera donnée par

$$u(x, y) = -\left[2y\, \vartheta_3(0, y) + 1\right] * \frac{\partial\, \vartheta_2\left(\dfrac{x}{2}, y\right)}{\partial x} .$$

Puisqu'on a pour cette fonction

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial u}{\partial x} = -\vartheta_3(0, y) - 1 ,$$

l'on peut déterminer u aussi par les conditions suivantes sur la frontière

$$\lim_{y \to 0} u = 0 , \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\partial u}{\partial x} = -\vartheta_3(0, y) - 1 , \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

La solution de ce problème s'écrit ainsi:

$$u(x, y) = \left[\vartheta_3(0, y) + 1\right] * \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right),$$

et l'identification des deux expressions pour u donne la relation

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right) * \left[\vartheta_3(0, y) + 1\right] + \frac{\partial \vartheta_2\left(\frac{x}{2}, y\right)}{\partial x} * \left[2y\, \vartheta_3(0, y) + 1\right] = 0 .$$

Pour $x \to 0$ cette relation se transforme en une équation intégrale pour $\vartheta_3(0, y)$:

$$\vartheta_3(0, y) * \left[\vartheta_3(0, y) + 1\right] - 2y\, \vartheta_3(0, y) - 1 = 0$$

indiquée par F. Bernstein (Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 1920, pp. 735-747). Pour d'autres exemples et pour une autre méthode de gagner de telles relations transcendantes par des transformations fonctionnelles, voir Doetsch [11].

V. — Le caractère analytique des solutions.

1. — Weierstrass [1] a montré en 1885 que la solution dans le demi-plan $y > 0$ de l'équation (1,21) de la chaleur avec les valeurs $\Phi(x)$ sur la frontière $y = 0$, représente sur chaque horizontale une fonction entière analytique en x. Plus explicitement: La solution donnée par la formule classique de Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x - \xi, y)\, \Phi(\xi)\, d\xi , \qquad (5, 1)$$

où χ désigne la fonction (3,331), a cette propriété. A cause de nos expériences sur la multiplicité des solutions nous nous trouvons obligés de nous servir de cet énoncé plus prudent. Weierstrass établit la même propriété pour la solution (1,23), si les températures $A(y)$ et $B(y)$ s'annulent.

Holmgren montra en 1905 ([1] et plus explicitement dans [3]) qu'une solution *régulière* (voir p. 50) de (1,21) représente sur