I. — Le problème de Dirichlet classique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LE PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL [1]

PAR

M. Florin VASILESCO (Paris).

I. — LE PROBLÈME DE DIRICHLET CLASSIQUE.

Le problème de Dirichlet concerne les solutions de l'équation de Laplace. Ce n'est que par extension que l'on a désigné par ce nom un problème analogue pour les solutions d'autres équations du type elliptique. De cette extension nous dirons quelques mots à la fin de cette conférence.[2]

Comme on le sait, on désigne par le nom de fonction harmonique, toute solution de l'équation de Laplace. Pour fixer les idées, nous emploierons ici le langage de l'espace à trois dimensions. On verra, d'ailleurs, que les récents progrès réalisés dans l'étude de ce problème sont dus à des notions d'origine physique, et c'est là une autre raison d'employer ce langage. Le cas de l'espace à deux dimensions est, en général, plus simple et entraîne des modifications faciles à faire.

Conformément au sous-titre de ce colloque, ainsi qu'au sujet de cette conférence, on doit se demander quelles sont les conditions propres à déterminer les solutions de l'équation de Laplace. Ces conditions ont été exprimées, à l'origine, par l'énoncé suivant du *Principe de Dirichlet. Si* D *est un domaine*, S *sa frontière et* f(p) *une fonction continue sur* S, *il existe une fonction*

---

[1] Conférence faite le 17 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

[2] Cette extension se trouve dans la conférence de M. SCHAUDER.

harmonique V(P), *dans* D, *prenant sur* S *les valeurs données* f(p). Autrement dit, V est continue en tout point de S, sur D + S, si on lui attribue sur S les valeurs $f(p)$.

Le problème de Dirichlet consiste à rechercher cette fonction V.

On a cru pendant longtemps que ce problème était toujours possible, ce qui veut dire, qu'il admettait toujours une solution, ainsi que l'affirmait le principe de Dirichlet. On ne parvenait pas à la résoudre dans le cas d'un domaine quelconque, mais on attribuait cela à l'extrême variété que présentait la notion de domaine. C'est pourquoi on avait été amené, connaissant sa solution dans des cas simples, tel celui de la sphère, à chercher des méthodes de résolution pour des cas de plus en plus étendus.

Les domaines que l'on avait considérés pendant longtemps étaient limités par des surfaces, et c'est, sans doute, à cause de cela qu'un cas simple d'impossibilité, tel que celui qu'a signalé M. ZAREMBA [1], n'avait pas été aperçu, ou, s'il l'avait été, n'avait pas été de nature à ébranler la solidité du principe de Dirichlet.

Voici ce cas. Supposons le domaine D sphérique. V prend au centre O une valeur déterminée. Envisageons le domaine D′, déduit du précédent, en considérant le point O comme point frontière, et attribuons à $f(p)$, en ce point, une valeur différente de celle qu'y avait la fonction V précédente. Il est facile de voir que la fonction V, dans le cas actuel, est encore celle du cas précédent. Elle n'est donc plus continue au point frontière O. Le problème est impossible.

Quelques années plus tard [2], M. LEBESGUE a fait connaître un exemple d'un domaine, *limité par une surface,* pour lequel le problème de Dirichlet n'est pas possible. A cet effet, il considère le potentiel d'une masse distribuée sur un segment de longueur unité, dont la densité, en tout point, est égale à la distance de ce point à une des extrémités du segment, prise comme origine. La surface équipotentielle sur laquelle le potentiel est égal à 2, par exemple, entoure le segment et présente une pointe en origine. Le domaine infini extérieur à cette surface, que l'on peut rendre

---

[1] *Bulletin intern. de l'Ac. des Sc. de Cracovie*, 1909, p. 199.
[2] *Comptes rendus séances de la Soc. Math. France*, t. 41, 27 nov. 1912, p. 17.

fini, si l'on veut, en le limitant par une sphère, est tel que le problème de Dirichlet n'y est pas possible pour les valeurs 2 sur la surface équipotentielle et les autres valeurs du potentiel sur la sphère. La seule fonction possible V est le potentiel lui-même, et il ne prend pas la valeur 2 en origine.

Ces deux exemples expriment des circonstances qui ne sont que des cas particuliers de phénomènes généraux, que l'on verra par la suite.

Ainsi, *le problème de Dirichlet n'est pas toujours possible*, et cette impossibilité consiste en ce que: il n'existe pas de fonction V prenant les valeurs données *en tous les points de la frontière.*

Il sera utile, pour la suite, de rappeler brièvement, quelques-unes des méthodes de résolution du problème de Dirichlet.

Méthode du balayage de Poincaré [1]. — Grâce à la formule bien connue

$$V = \frac{1}{4\pi} \int\int_S f(p) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_i} dS ,$$

Poincaré ramène la recherche de la solution de ce problème à celle de la fonction de Green du domaine, G(P, Q), et, celle-ci, au moyen d'une inversion du pôle comme centre, à celle de la fonction harmonique V à l'extérieur d'une surface C, régulière à l'infini et prenant les valeurs unité sur C: c'est le potentiel de la distribution d'équilibre sur le conducteur C. Cette notion de *potentiel conducteur* sera généralisée plus tard et jouera un rôle fondamental.

Pour trouver cette fonction V, Poincaré considère, d'une part, une sphère contenant à l'intérieur C, et sur elle une distribution uniforme de masse dont le potentiel est égal à l'unité à l'intérieur et, d'autre part, une suite de sphères extérieures à C, mais telles que tout point extérieur à C soit intérieur à l'une d'elles, au moins. Il range ces sphères en une suite, de façon que chacune d'elles y figure une infinité de fois, et procède au balayage de la masse qui se trouve dans chacune d'elles, successivement. Cette opération se traduit par ce que le potentiel de la masse totale,

[1] Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique (*Amer. Jour. of Math.*, t. 12, 1890).

modifiée, diminue, à chaque stade de l'opération, et devient harmonique dans la sphère de la suite qu'il concerne, puisqu'on remplace la masse intérieure à cette sphère par une masse distribuée sur sa frontière. En vertu du théorème de Harnack, la suite de fonctions ainsi trouvées a une limite V qui est harmonique.

En assujetissant la surface C à satisfaire à certaines conditions — que M. Lebesgue a désignées, depuis, par le nom de conditions de régularité [1] — Poincaré montre que cette fonction prend bien la valeur unité sur C, ce qui assure, de plus, son unicité.

Il est bon de remarquer qu'il y a, dans la méthode précédente, deux parties: la définition d'une fonction V et l'étude de sa continuité à la frontière. De plus, la démonstration de l'unicité est subordonnée aux conditions de régularité.

Méthodes relevant du principe du minimum. — Il y a tout un groupe de telles méthodes [2]. Leur but était de redresser les erreurs contenues dans le raisonnement bien connu de Riemann, erreurs qui ont été mises en évidence par Weierstrass et M. Hadamard [3].

Il suffira de rappeler ici deux de ces méthodes: celles de M. Zaremba [4] et celle de M. Lebesgue [5].

Voici la méthode de M. Zaremba. Désignons par Ω un domaine général qui est simplement un *ensemble ouvert* d'un seul tenant, et soit Σ sa frontière. Considérons l'ensemble F des fonctions continues dans $\Omega + \Sigma$ et prenant sur Σ les valeurs données f, fonctions admettant des dérivées premières continues dans Ω. Supposons que l'intégrale

$$A = \int\int\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\Omega$$

existe pour elles, car, d'après l'objection de M. Hadamard, elle pourrait bien n'exister pour aucune de ces fonctions. Soit I le minimum de ces intégrales.

---

1 *C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. 178, 21 janv. 1924, p. 349.

2 Voir pour la bibliographie le fascicule de M. Bouligand : Fonctions harmoniques, etc., du *Mémorial des Sciences mathématiques.*

3 WEIERSTRASS, *Werke*, Bd. 2, p. 49; HADAMARD, *Bul. Soc. math. Fr.*, t. 34, 1906, p. 135.

4 Loc. cit.

5 *C. R. Ac. Sc.*, t. 154, 1912, p. 335; t. 155, 1912, p. 699; *Rendiconti Circ. mat. di Palermo*, t. 24, 1907, p. 371.

On appelle *minimisante*, une suite de fonctions v_i de F dont les intégrales tendent vers I.

Assignons à tout point M de Ω un nombre positif ρ_M inférieur à la distance de M à Σ et soit

$$F_i(M) = \frac{3}{4\pi\rho_M^3} \iiint_{(\rho_M)} v_i \, dx \, dy \, dz$$

(ρ_M) étant la sphère de rayon ρ_M et de centre M. M. Zaremba démontre que

La suite $F_i(M)$ tend uniformément — sur tout ensemble fermé E de points M, pour lesquels ρ_M admet une limite inférieure plus grande que zéro — vers une fonction harmonique V, dans Ω, dont l'intégrale est égale à I.

V est indépendante du choix des ρ_M.

S'il existe une fonction u de E dont l'intégrale soit encore égale à I, on aura $u = V$.

V est, à une constante additive près, la solution du problème suivant:

On cherche une fonction harmonique U dans Ω, pour laquelle l'intégrale existe et est telle que

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial h}{\partial z}\right) d\Omega = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \ldots\right) . \, d\Omega$$

pour toute fonction harmonique h dans Ω, et toute fonction u de E, les intégrales A existant pour h et u.

Si un point p de Σ peut être pris pour sommet d'un cône de révolution de hauteur non nulle, extérieur à Ω, V tend vers f en ce point.

On distingue également ici, comme dans la méthode du balayage, les deux parties: le procédé de définition de V et la recherche de sa continuité à la frontière. Mais l'unicité de V n'est plus subordonnée à la condition de régularité constituée par l'existence du cône.

Voici maintenant la méthode de M. Lebesgue. On considère, comme précédemment, une suite minimisante v_i, mais on borne, en valeur absolue, toutes ces fonctions, par un même nombre,

car les fonctions v_i peuvent ne pas avoir de dérivées premières sur des surfaces analytiques telles que tout domaine intérieur à Ω n'en contienne qu'un nombre fini. Soit s une sphère intérieure à Ω. On peut extraire de la suite donnée une autre suite convergeant uniformément vers une fonction harmonique dans s. En prenant des sphères successives, empiétant chacune sur la précédente, et en tenant compte d'un théorème d'unicité [1] de M. Lebesgue — qui montre que si deux suites minimisantes tendent vers des limites dans un domaine intérieur à Ω, ces limites coïncident — on voit aisément que l'on définit ainsi une fonction harmonique V dans Ω.

Pour rechercher sa continuité à la frontière, M. Lebesgue introduit la notion de fonction barrière [2], qui s'est montrée, depuis, d'un puissant intérêt dans l'étude des fonctions harmoniques [3]. Cette notion permet à l'auteur de formuler un critère de régularité plus général que celui de M. Zaremba.

On peut faire ici la même remarque au sujet des deux parties que comporte la méthode.

On doit également à M. Lebesgue une autre méthode [4], par médiations itérées, que nous regrettons de ne pouvoir exposer ici.

D'autres méthodes sont dues à MM. Gleason, Raynor [5], Phillips et Wiener [6], etc.

Dans toutes ces méthodes on peut distinguer les deux parties précédemment mentionnées.

Enfin, il y a des méthodes relevant des équations intégrales, telles la méthode de Robin, de Neumann, de Fredholm, etc. Ces méthodes ne sauraient nous intéresser pour notre but actuel, car elles sont fondées sur la continuité de la solution du problème de Dirichlet à la frontière.

C'est M. Lebesgue qui a formulé [7] la distinction, qu'il y a lieu de faire, entre les deux parties, dans les méthodes de résolution du problème de Dirichlet. Ce fait, joint à l'exemple d'impossi-

---

1 *Rendiconti* (loc. cit.).
2 *C. R.*, t. 155 (loc. cit.).
3 Kellogg, *Bul. of the Amer. Math. Soc.*, nov.-déc. 1926.
4 *C. R.*, t. 154 (loc. cit.).
5 *Annual's of Math.*, vol. 23, p. 183.
6 *Journ. math. phys. Mass. Inst. of Tech.*, 2me série, n° 55, mars 1923.
7 *C. R.*, t. 178 (loc. cit.).

bilité de ce problème qu'il a donné, a conduit l'éminent auteur aux notions fondamentales de *point régulier* et *point irrégulier* de la frontière d'un domaine.

Un point frontière sera dit *régulier* si la fonction V est continue et prend la valeur f en ce point, quelle que soit la fonction f. Contrairement, le point sera dit *irrégulier*.

M. Lebesgue montre de plus que le caractère régulier et irrégulier d'un point frontière est local et ne dépend que de son voisinage immédiat de la frontière.

Les diverses conditions de régularité que l'on avait données dépendent des procédés employés pour définir la fonction V. Ce fait ne présenta aucun inconvénient tant qu'il s'était agi, comme cela a été le cas, de rechercher des domaines de plus en plus généraux pour lesquels on pût résoudre le problème de Dirichlet. En effet, on obtenait de tels domaines en assujettissant leurs frontières à satisfaire à un même critère de régularité, obtenu au moyen d'un procédé déterminé.

Toutefois, on ne saurait employer, pour vérifier le caractère régulier des points frontière d'un domaine, des conditions de régularité différentes, si ces conditions correspondent à des procédés *ne conduisant pas tous* à la même fonction V.

Ce fait gênant conduit à se demander si les fonctions V auxquelles donnent naissance les divers procédés que l'on a donnés, sont, ou ne sont pas, différentes. A cette importante question, nous répondrons (chap. IV) par la négative: ces procédés conduisent tous à une même fonction V. Dès lors, on pourra employer indistinctement les critères de régularité connus, pour juger de la régularité d'un point frontière.

Ces critères sont des conditions de régularité *suffisantes*, sauf un, dû à M. Lebesgue [1], qui est nécessaire et suffisant. Il a un caractère fonctionnel.

On peut conclure ce chapitre de la manière suivante. Quelques-uns des procédés que l'on avait donnés pour résoudre le problème de Dirichlet définissent bien une fonction harmonique V, attachée à des valeurs frontières données f, et cela dans le cas d'un domaine général — défini simplement comme un ensemble ouvert. Mais,

---

[1] *C. R.*, t. 178, loc. cit.

soit que leurs auteurs eussent pour objectif simplement la résolution du problème de Dirichlet classique, soit que les critères de régularité ou d'irrégularité que l'on donnait ne permissent pas de connaître le comportement de la fonction V en tous les points de la frontière, à cause de leur caractère suffisant, une telle fonction V n'a jamais été désignée pour être solution d'un problème de Dirichlet plus étendu que le problème classique, devant remplacer celui-ci dans les cas où il est impossible.

II. — Le problème de Dirichlet généralisé.

C'est M. N. Wiener [1] qui, en 1934, donna un procédé de définition d'une fonction V, indépendamment de l'idée de résoudre le problème de Dirichlet classique. De plus, il caractérisa, au moyen d'un critère nécessaire et suffisant de nature quasi-géométrique [2], les points réguliers et irréguliers de la frontière, pour ce procédé. Il envisagea ainsi un problème plus étendu que le problème de Dirichlet classique qu'il désigna par le nom de Problème de Dirichlet généralisé. Son procédé constitue une extension naturelle du problème classique et cela permet de voir que, lorsque celui-ci est possible, sa solution coïncide avec la fonction V donnée par ce procédé.

Il est, dès lors, naturel que l'on désigne un domaine pour lequel le problème classique est possible, par un nom particulier: convenons, selon un usage déjà répandu, de l'appeler *domaine normal.* Par exemple, un domaine formé par un assemblage de cubes, est un tel domaine: on le voit en utilisant, si l'on veut, le critère de M. Zaremba.

Voici le procédé de M. Wiener.

Soient Ω un domaine, borné ou non — ensemble ouvert — Σ sa frontière, supposée bornée, et $f(p)$ une distribution continue sur elle. Considérons d'une part, une fonction continue dans tout l'espace, F, coïncidant avec f sur Σ [3] et, d'autre part, une suite Ω_k de domaines normaux intérieurs à Ω et tendant vers lui.

---

[1] *J. Math. Phys. Mass. Inst. of Tech.*, 2me série, nº 70, janv. 1924.
[2] *Ibid.*, nº 1, janv. 1925.
[3] C'est M. Lebesgue qui a montré la possibilité de construire une telle fonction dans son mémoire cité du Circolo matematico.