Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE, PROBLÈMES LINÉAIRES
Autor: SCHAUDER, J.
Kapitel: I.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27308

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

En 1932 j'ai employé pour la première fois le second procédé qui me semble assez simple et bref (voir *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1932, janvier 1933; *Math. Zeitschrift*, Bd. 38, janvier 1934; *Studia Math.*, Bd. 5, 1934). Je pars de quelques théorèmes bien connus de la théorie du potentiel (théorèmes relatifs aux équations de Laplace et de Poisson) et je les étends *directement* et assez vite à l'équation générale linéaire du type elliptique. J'obtiens ainsi les limitations précises, essentielles pour les recherches ultérieures. On ne se sert plus ici des solutions élémentaires, des fonctions de Green ni des potentiels généralisés. C'est ce dernier procédé que je vais exposer dans cette conférence.

Considérons une équation générale du second ordre et du type elliptique

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f \ . \tag{1}$$

On impose maintenant très peu de restrictions aux coefficients a_{ik}; il suffit, par exemple, qu'ils satisfassent à une condition de Hölder. Les méthodes antérieures, celles de LICHTENSTEIN, de STERNBERG exigeaient que les a_{ik} soient deux fois dérivables. Mais la diminution du nombre d'hypothèses imposées aux coefficients est loin d'être seulement un effort de nature sportive! Si vous vous êtes occupés une seule fois, Messieurs, d'équations aux dérivées partielles non linéaires, vous savez bien que cette théorie exige de la théorie des équations linéaires les résultats les plus précis et les plus subtils.

I.

Le point de départ de la méthode directe dont nous voulons maintenant donner une esquisse, consiste en quelques limitations des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \tag{2}$$

et de l'équation de Poisson

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \ . \tag{3}$$

M. A. Korn s'occupa le premier, en 1907, de telles évaluations; elles furent ensuite traitées par beaucoup d'auteurs.

Introduisons ici quelques notations. Nous appelons norme de la fonction f dans le domaine G l'expression

$$\| f \|_{\alpha}^{G} = \operatorname*{Max}_{G} |f| + \text{la plus petite constante de Hölder.} \tag{4}$$

c'est-à-dire la plus petite constante C satisfaisant à l'inégalité

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq C r_{12}^{\alpha}, \quad 1 > \alpha > 0, \tag{5}$$

P_1, P_2 étant des points du domaine G et r_{12} leur distance. Pareillement, f étant une fonction dérivable m fois dans G et dont les dérivées d'ordre m satisfont à la condition de Hölder, nous appelons $\| f \|_{\alpha, m}^{G}$, l'expression

$$\| f \|_{\alpha, m}^{G} = \operatorname*{Max}_{G} |f| + \Sigma \| D_1 f \|_{\alpha}^{G} + \ldots + \Sigma \| D_m f \|_{\alpha}^{G} \tag{6}$$

chaque sommation étant ici étendue à toutes les dérivées d'ordre considéré.

Envisageons maintenant l'équation (3), où f remplit la condition de Hölder, dans une sphère K_R de rayon R. On sait (d'après M. A. Korn) que la solution de (3), s'annulant sur la frontière de K_R, admet dans K_R fermée les dérivées secondes continues et satisfaisant à la condition de Hölder avec le même exposant α; en outre nous avons l'inégalité

$$\| u \|_{\alpha, 2}^{K_R} \leq C \| f \|_{\alpha}^{K_R} \tag{7}$$

où la constante C ne dépend pas de R.

D'autre part envisageons l'équation homogène (2) dans un domaine G borné dont une partie de la frontière entière S est un hyperplan H. Supposons u bornée dans G. Quant aux valeurs aux limites que nous désignerons par $\varphi(s)$ (s étant un point de H ou de S), elles doivent admettre sur H des dérivées secondes [1], satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant α. Alors dans

[1] Bien entendu, les dérivées de φ sont calculées par rapport aux variables paramétriques qui caractérisent la portion donnée de la surface H.

le voisinage U de chaque point P situé à l'intérieur [1] de H la fonction u possède des dérivées du second ordre « Hölderiennes » En outre l'inégalité

$$\| u \|_{\alpha,2}^{U} \leq C\left(\| \varphi \|_{\alpha,2}^{V} + \operatorname*{Max}_{G} | u |\right) \tag{8}$$

subsiste [2].

Cette généralisation du théorème concernant l'équation de Laplace qui consiste à supposer la régularité des valeurs aux limites sur une *portion* seulement de la frontière et non pas sur la frontière entière, est une des bases de notre procédé.

II.

Les deux théorèmes que nous venons d'énoncer et les évaluations correspondantes s'étendent facilement aux équations homogènes ou non homogènes du type elliptique dont les coefficients $\overset{0}{a}_{ik}$ sont *constants;*

$$\begin{aligned} L^0 u &= \sum_{i,k=1}^{n} \overset{0}{a}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \,, \quad (\overset{0}{a}_{ik} = \overset{0}{a}_{ki}) \\ L^0 u &= \sum_{i,k=1}^{n} \overset{0}{a}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} = f \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Il suffit de remarquer que $L^0 u$ se transforme en Δu par une substitution linéaire des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En supposant le déterminant des $\overset{0}{a}_{ik} = 1$ et

$$| \overset{0}{a}_{ik} | \leq m \,, \tag{10}$$

(ce qui ne diminue pas la généralité) nous obtenons

$$\begin{aligned} &\| u \|_{\alpha,2}^{K} \leq C(m) \, \| f \|_{\alpha}^{K} \text{ pour l'équation } L^0 u = f \,, \\ &\| u \|_{\alpha,2}^{U} \leq C(m) \left(\| \varphi \|_{\alpha,2}^{V} + \operatorname*{Max}_{G} | u |\right) \text{ pour } L^0 u = 0 \,. \end{aligned} \tag{11}$$

---

[1] U est le produit d'une sphère à n dimensions et de l'ensemble G + S.

[2] $\| \varphi \|_{\alpha,2}^{H}$ est aussi calculée par rapport aux paramètres locaux sur H.