III.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Cette évaluation diffère de la précédente seulement par le fait que, maintenant, la constante C dépend de m. On peut d'ailleurs trouver aisément la forme exacte de la fonction $C(m)$.

III.

Passons maintenant à l'équation générale

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f . \tag{12}$$

Nous supposons $|a_{ik}| \leq m$, les constantes de Hölder des $a_{ik} \leq M$, le déterminant des $a_{ik} = 1$ et nous considérons d'abord la solution de (12) à l'*intérieur*[1] du domaine borné G, le second membre f étant Hölderien ($\|f\|_{\alpha}^{G} < \infty$). Nous supposons en plus qu'une limitation de u est connue dans tout le domaine G et que u ainsi que ses dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder à l'intérieur de G (mais pas nécessairement sur la frontière S). Cherchons une limitation de $D_1 u$, $D_2 u$ et des constantes de Hölder pour $D_2 u$ à l'intérieur de G. Soulignons, que nous *ne sommes pas* en train de construire une solution; la solution u de (12) est donnée, ses dérivées sont régulières et notre but est d'établir quelques inégalités. Notre procédé est le suivant: Soit P un point intérieur à G, $d(P)$ sa distance de la frontière du domaine G et λ un nombre (arbitraire) de l'intervalle $< 01 >$: $0 \leq \lambda \leq 1$. Construisons un cube $W(P, \lambda)$ à n dimensions, de centre P et de côtés parallèles aux axes; la longueur des côtés est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}} \lambda d(P)$. Nous nous proposons de trouver la borne supérieure de la fonction

$$\left[d(P)\right]^{\alpha+2} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P, \lambda)} \overset{df}{=} h(P, \lambda)$$

pour λ constant. Désignons cette borne, qui d'ailleurs est finie, par $N(\lambda)$. Soit P_0 un point intérieur à G tel que

$$\left[d(P_0)\right]^{2+\alpha} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \geq \frac{N(\lambda)}{2} . \tag{13}$$

[1] A la fin de ce paragraphe nous donnerons une évaluation analogue sur la frontière et dans son voisinage.

En écrivant l'équation (12) sous la forme

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(P_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{n} \left[a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f , \tag{14}$$

nous pouvons appliquer les résultats obtenus plus haut pour l'équation à coefficients constants à

$$L^0 u = \Psi , \tag{15}$$

où

$$\Psi = \Sigma \left[a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f . \tag{16}$$

Nous ne reproduirons pas ici tout le calcul (qui, d'ailleurs, ne dépasse pas l'étendue d'une page et demie [1]); le résultat en est

$$\| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leq K(m, M) \left\{ \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot \lambda^{\alpha} \left(d(P_0)\right)^{\alpha} + \frac{\operatorname{Max} |u|}{\lambda^{2+\alpha} \left[d(P_0)\right]^{2+\alpha}} + \dots \right\} \tag{17}$$

K dépend de M, c'est-à-dire de la constante de Hölder des coefficients a_{ik}; on peut trouver facilement la forme exacte de cette dépendance. D étant le diamètre du domaine G, définissons λ_0 par la relation

$$K(m, M) \lambda_0^{\alpha} D^{\alpha} = \frac{1}{2} ; \tag{18}$$

l'inégalité précédente devient alors

$$\| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leq \frac{1}{2} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \alpha)} + K(m, M) \frac{\operatorname{Max} | u |}{\lambda_0^{2+\alpha} \left[d(P_0)\right]^{2+\alpha}} + \dots . \tag{19}$$

En transportant $\frac{1}{2} \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)}$ dans le premier membre de l'inégalité (19) et en la multipliant ensuite par $\left[d(P_0)\right]^{2+\alpha}$, nous obtenons

$$\| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot \left[d(P_0)\right]^{2+\alpha} \leq K_1(m, M) \left[\| f \|_{\alpha}^{G} + \operatorname*{Max}_{G} | u | \right] , \tag{20}$$

d'où nous tirons, en vertu de (13), une limitation pour $N(\lambda)$.

---

[1] Voir mes publications indiquées plus haut et particulièrement la *Math. Zeitschrift.*

Ce raisonnement reste valable pour l'équation plus générale

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \Sigma b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f . \tag{21}$$

Passons maintenant à la limitation dans *le voisinage de la frontière.* Il faut alors ajouter à nos hypothèses la supposition suivante:

Dans un voisinage U d'une portion H de la frontière [1] les dérivées secondes de u satisfont à la condition [2] de Hölder ; $\|u\|_{\alpha,2}^{U} < \infty$. φ étant les valeurs aux limites, nous prouvons, par un procédé tout à fait semblable au précédent, une limitation pour $\|u\|_{\alpha,2}^{U'}$ dans chaque domaine U′ intérieur à U. Il suffit de transformer H en un hyperplan H′ et d'appliquer les limitations précédentes [3].

IV.

Nous démontrerons maintenant qu'on peut *déduire les théorèmes d'existence des limitations précédentes.* Commençons par l'équation

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f \tag{22}$$

et par des valeurs aux limites ayant des dérivées secondes Hölderiennes (problème de Dirichlet).

Envisageons l'ensemble d'équations du type elliptique dépendant d'un paramètre λ

$$\Sigma a_{ik}^{(\lambda)} \frac{\partial^2 u^{(\lambda)}}{\partial x_i \partial x_k} = f \tag{23}$$

et telles que l'on ait $a_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$ (symbole de Kronecker), mais $a_{ik}^{(1)} = a_{ik}$. Pour $\lambda = 0$ nous obtenons alors l'équation de Poisson

$$\Delta u^{(0)} = f$$

---

1 Voir note 1, p. 129.

2 C'est-à-dire les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder dans l'ensemble envisagé.

3 Voir l'inégalité (8).