III. — Les équations de Navier.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Physique mathématique fournit d'innombrables systèmes différentiels ou de Pfaff dont il est vraisemblablement aisé de prouver l'équivalence avec une équation fonctionnelle du type $x = \mathcal{F}(x)$: les intégrer, c'est savoir majorer leurs solutions; or nous ne disposons à l'heure actuelle d'aucune méthode générale qui puisse diriger nos calculs. Forger une telle méthode, tel est le problème fondamental qui se pose. Nous possédons quelques inégalités diverses; je veux en citer une, particulièrement élégante, due à M. T. Carleman (*Math. Zeitschrift*, 1921, t. 9, p. 154-160), Radò et Beckenbach (*Trans. of the Amer. Math. Society*, t. 35, 1933): Si S est l'aire d'une surface (inconnue) dont tous les points sont hyperboliques et qui passe par un contour (donné) de longueur L, alors $S < \frac{L^2}{4\pi}$. Sans doute la théorie des fonctions analytiques, qui est si riche en inégalités, nous sera-t-elle un exemple très utile: le livre que M. Radò a consacré au problème de Plateau (On the Problem of Plateau, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin, 1933) montre avec quel bonheur les idées de cette théorie ont déjà été appliquées à l'étude des surfaces minima.

III. — Les équations de Navier.

10. — *Régimes permanents.* — Les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier, qui constituent un système non linéaire du second ordre; les variables indépendantes, qui s'imposent, sont les coordonnées d'espace et de temps: l'inconnue est la vitesse; c'est un vecteur de divergence nulle.

Etudions d'abord un régime permanent; le problème qui se pose est un problème de Dirichlet dans un cas analogue au type elliptique. M. Odqvist l'a ramené à un système d'équations intégrales; celles-ci constituent une équation fonctionnelle du type $x = \mathcal{F}(x)$. La première quantité que l'on majore est une grandeur physique: l'énergie dissipée par unité de temps. On parvient à la limiter en utilisant deux expressions qu'elle revêt: la première est une intégrale de volume qui exprime l'intensité du frottement visqueux interne; la deuxième est une intégrale

de surface qui mesure la quantité d'énergie fournie au système. La majoration de l'énergie dissipée effectuée, on majore aisément les diverses inconnues, et ceci résout le problème.

11. — *Mouvements non permanents; solutions turbulentes.* — Etudions maintenant le mouvement qui correspond à un champ de vitesses initiales donné; le problème est d'un type analogue au type parabolique; simplifions la question en admettant que le liquide emplit tout l'espace. L'énergie cinétique décroît; la quantité d'énergie dissipée est au plus égale à l'énergie cinétique initiale; ces deux inégalités, qui résultent des équations de Navier, constituent deux premières majorations fondamentales.

Si le mouvement est plan, c'est-à-dire si l'on réduit à deux le nombre de dimensions de l'espace, on peut parvenir à combiner ces inégalités avec les équations de Navier de manière à obtenir une série d'inégalités de plus en plus précises; il en résulte l'existence d'une solution régulière définie de l'instant initial $t = 0$ à $t = +\infty$.

Mais il en va bien autrement dans l'espace à trois dimensions. Les inégalités énergétiques ne semblent pas entraîner que le maximum de la vitesse reste borné, que le mouvement reste régulier; on doute qu'il soit possible d'établir un théorème d'existence global, c'est-à-dire concernant l'intervalle $0 \leq t < +\infty$. Cependant il est bien vraisemblable qu'on peut régulariser le mouvement en se contentant de renforcer les termes de viscosité quand des irrégularités tendent à se former; les équations de Navier, très peu modifiées, possèdent une solution définie de l'instant initial à $t = +\infty$. Pour examiner comment se comporte cette solution régulière, quand la modification apportée aux équations de Navier tend vers 0, il est nécessaire d'utiliser la théorie des fonctions mesurables: Le champ des vitesses tend vers une ou plusieurs limites, définies par des fonctions de carrés sommables, qu'on sait seulement être mesurables; ces fonctions possèdent des dérivées premières en un sens généralisé; elles vérifient les relations intégro-différentielles de M. Oseen. Ces relations intégro-différentielles équivalent en pratique aux équations de Navier; mais elles ont l'avantage sur ces dernières de ne pas contenir celles des dérivées des

inconnues qui n'ont pas de raison physique d'exister ; il se trouve que ce sont les dérivées dont on ne réussit pas à établir l'existence.

Nommons un tel champ de vitesses: « solution turbulente des équations de Navier ». Une solution turbulente a la structure suivante: il existe sur l'axe des temps une série d'intervalles de régularité, durant lesquels cette solution constitue une solution régulière des équations de Navier, indéfiniment dérivable; l'ensemble complémentaire de l'axe des temps, qui constitue l'ensemble des irrégularités, est de mesure nulle; à ces époques d'irrégularités le champ des vitesses vérifie seulement une condition de continuité très large.

La théorie des équations aux dérivées partielles semble ainsi être appelée à devenir un champ d'applications de la *théorie des fonctions réelles.*

HISTORIQUE ET BIBLIOGRAPHIE

Chapitre I.

Tout ce que l'on sait actuellement sur le sujet que traite le premier chapitre est contenu dans les deux articles suivants:

LERAY-SCHAUDER, *Annales de l'Ecole normale*, t. 51, 1934, p. 45-63 (ch. I, II, III).

LERAY, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 200, 25 mars 1935, p. 1082.

Le premier théorème d'existence qui a réussi à résoudre une équation fonctionnelle pouvant admettre plusieurs solutions est celui « du point fixe »:

BIRKHOFF et KELLOG, *Transactions of the Amer. Math. Society*, t. 23 (1922).

SCHAUDER, *Studia mathematica*, t. 2, 1930, p. 170-179 (Satz II).

Ce théorème du point fixe n'est qu'un corollaire du théorème d'existence qu'expose le chapitre I de cette conférence.

J'ai signalé le premier que la démonstration d'un théorème d'existence pouvait être ramenée à la majoration de l'inconnue:

LERAY, Thèse, *Journal de Mathématiques*, t. 12, 1933, chap. I (p. 1-20).

M. SCHAUDER, le premier, découvrit que des théorèmes de Topologie combinatoire valent encore dans les espaces de Banach, quand on prend la précaution essentielle de substituer à la notion de transformation continue quelconque celle de transformation du type $x + \mathcal{F}(x)$ (où $\mathcal{F}(x)$ est complètement continue).