Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA TOPOLOGIE DES ESPACES REPRÉSENTATIFS DES GROUPES DE LIE

Autor: Cartan, Elie

Kapitel: VI. — Les groupes de Lie simplement connexes et le TROISIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27310

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

groupes de transformations pseudo-conformes laissant invariant un domaine borné symétrique: cela veut dire un domaine admettant en lui-même une transformation pseudo-conforme involutive dont un point arbitrairement donné du domaine est un point invariant isolé.

Comme exemples de groupes simples ouverts dont le premier nombre de Betti est égal à 1, citons le groupe homographique réel d'une variable, le groupe linéaire complexe d'une forme d'Hermite indéfinie, le groupe linéaire réel d'une forme quadratique réelle réductible à $p \geqq 2$ carrés positifs et 2 carrés négatifs. Comme exemple de groupes simples ouverts dont le premier nombre de Betti est nul, citons le groupe linéaire réel d'une forme quadratique réductible à $p \geqq 3$ carrés positifs et $q \geqq 3$ carrés négatifs. Si l'un des entiers p et q est impair, le groupe fondamental du groupe adjoint est d'ordre 4; si p et q sont pairs tous deux, il est d'ordre 8. Enfin le groupe des déplacements de l'espace hyperbolique réel à $n \geqq 3$ dimensions admet un groupe fondamental d'ordre 2.

Ajoutons la remarque qu'*un groupe simple ouvert n'admet pas toujours de représentation linéaire fidèle;* il en est certainement ainsi si le premier nombre de Betti de son groupe adjoint est égal à 1, le premier nombre de Betti du groupe lui-même étant nul; exemple: le groupe simplement connexe de recouvrement du groupe homographique réel à une variable.

Si l'on passe maintenant d'un groupe simple ouvert à un groupe semi-simple ouvert, on voit que son premier nombre de Betti h_1 est au plus égal au nombre des groupes simples dont il est infinitésimalement le produit direct; quant au second nombre de Betti, on démontre facilement qu'il est égal à $\frac{h_1(h_1-1)}{2}$.

VI. — Les groupes de Lie simplement connexes et le troisième théorème fondamental de Lie.

Il nous reste maintenant à démontrer, pour les groupes de Lie simplement connexes les plus généraux, le théorème suivant, dont je rappelle l'énoncé.

L'espace d'un groupe de Lie simplement connexe est le produit topologique d'espaces de groupes simples clos et d'un espace euclidien.

La démonstration que je vais indiquer de ce théorème est intimement liée à la démonstration d'un autre théorème dont je n'ai pas encore parlé, c'est la réciproque du troisième théorème fondamental de S. Lie. J'ai rappelé au début de cette conférence l'existence de relations algébriques (2) entre les constantes de structure d'un groupe de Lie quelconque. On connaît plusieurs démonstrations du fait qu'à tout choix de constantes satisfaisant à ces relations correspond un groupe, mais ces démonstrations ne prouvent l'existence que d'un groupe *local*, limité au voisinage de l'élément identique et c'est une question non encore résolue de savoir si un groupe fini et continu *local* peut être toujours prolongé en un véritable groupe fini et continu, défini *globalement*. J'ai indiqué [**17**] pour les groupes infinitésimaux de Lie, une démonstration faisant appel à un théorème d'E. E. Levi; mais la démonstration de ce dernier théorème est par elle-même assez compliquée et n'a du reste jamais été faite que dans le cas des groupes infinitésimaux à paramètres complexes[1]. Je vais indiquer une démonstration plus simple qui a cependant sur la précédente l'inconvénient de s'appuyer sur la propriété d'un groupe simple clos d'avoir ses deux premiers nombres de Betti nuls.

Remarquons d'abord que la première démonstration donnée par Lie lui-même de la réciproque de son troisième théorème fondamental est valable au point de vue *global* aussi bien que *local*. Elle s'applique lorsque le groupe infinitésimal est du même ordre que son groupe dérivé, ce qui revient à dire que le groupe n'admet aucun groupe continu abélien qui lui soit isomorphe (mériédrique ou holoédrique). Dans ce cas en effet on peut écrire *a priori* les transformations infinitésimales (5) du groupe adjoint par la seule connaissance des constantes de structure:

$$\mathrm{E}_i \equiv c_{ki}^h e^k \frac{\partial f}{\partial e^h} \; ; \tag{5}$$

[1] M. J.-H.-C. Whitehead a obtenu récemment de ce théorème une élégante démonstration, non encore publiée, valable aussi bien dans le domaine réel que dans le domaine complexe.

or ces r transformations infinitésimales engendrent un groupe sous la seule condition que les c_{ik}^{h} satisfassent aux relations algébriques de Lie, et ces constantes sont les constantes de structure de ce groupe. On a ainsi un groupe infinitésimal de la structure donnée; mais comme ce groupe est linéaire, ses transformations opèrent sur un champ préexistant, à savoir l'espace euclidien à r dimensions, et, dans ce champ, on peut composer les transformations du groupe local de manière à engendrer un groupe global.

Cette conclusion s'applique en particulier à tous les groupes infinitésimaux semi-simples [1]; c'est pour cela que nous n'avons pas eu à nous poser la question d'existence des groupes globaux dans ce cas-là.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Tout groupe infinitésimal de Lie admet une représentation intégrale simplement connexe dont la variété est le produit topologique d'un ou de plusieurs espaces de groupes simples clos et d'un espace euclidien.*

Ce théorème est vrai pour les groupes infinitésimaux semi-simples. Nous allons procéder par récurrence en démontrant le Lemme suivant.

LEMME. *Soit* G *un groupe infinitésimal d'ordre* r + n *admettant un sous-groupe invariant abélien* g *d'ordre* n. *Si le groupe infinitésimal* G/g *vérifie le théorème fondamental, il en est de même du groupe* G.

Supposons un instant ce lemme démontré. Si G n'est pas semi-simple, il admet un plus grand sous-groupe invariant intégrable G_1 [**2**]; le sous-groupe G_1 étant intégrable, cela signifie que si l'on forme ses groupes dérivés successifs G_2, G_3, ..., le dernier G_k est abélien [**1**]. D'autre part, d'après un théorème de Lie, tous ces groupes sont invariants dans G. Cela posé, l'application du Lemme au groupe G/G_2, qui admet G_1/G_2 comme sous-groupe invariant abélien, alors que le groupe simple G/G_1 satisfait au théorème fondamental, montre que G/G_2 satisfait

[1] Elle serait générale si l'on savait démontrer que tout groupe infinitésimal de Lie est isomorphe (holoédrique) d'un groupe linéaire.

aussi à ce théorème. On applique ensuite le Lemme de proche en proche aux groupes G/G_3, G/G_4, etc. jusqu'au groupe G lui-même.

Avant de nous occuper du Lemme, donnons quelques indications sur la démonstration de la réciproque du troisième théorème fondamental de Lie. Si l'on se donne un système de constantes c_{ij}^k satisfaisant aux relations algébriques de Lie, on aura le groupe des paramètres d'un groupe de la structure donnée en construisant *dans une variété à* r *dimensions convenablement choisie*, *r* expressions de Pfaff $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r$ linéairement indépendantes et partout régulières satisfaisant aux *équations de Maurer-Cartan* [1]

$$(\omega^i)' = \frac{1}{2} c_{jk}^i [\omega^j \omega^k] \ . \tag{6}$$

Ces formes étant construites, on aura le groupe des paramètres cherché en intégrant les équations complètement intégrables

$$\omega^i(\xi' \, ; \, d\xi') = \omega^i(\xi \, ; \, d\xi) \ ,$$

les ξ étant les coordonnées d'un élément du groupe, les ξ' celles de l'élément transformé. *Si la variété choisie est simplement connexe*, cette intégration, *tant qu'elle pourra se poursuivre*, donnera pour les ξ' des fonctions uniformes des ξ, mais, pour être sûr qu'on ne sera jamais arrêté dans l'intégration, on sera obligé d'astreindre les formes ω_i à des conditions restrictives, par exemple que l'espace riemannien obtenu en introduisant dans la variété une forme différentielle quadratique définie positive $g_{ij}\omega^i\omega^j$ à coefficients g_{ij} constants, est *normal*[2] ou *complet*. La démonstration classique de la réciproque du troisième théorème fondamental revient, ce qui est facile [**6**], à trouver des formes ω^i satisfaisant aux équations de Maurer dans l'espace euclidien des paramètres canoniques; *mais ces formes cessent d'être linéairement indépendantes* quand on s'éloigne suffisamment de l'élément-unité.

Cela posé, venons au Lemme à démontrer. Soient X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) les transformations infinitésimales de base du

---

[1] Dans un groupe de paramètres ξ, les formes ω^i sont les paramètres de la transformation infinitésimale $a_\xi^{-1} a_{\xi+d\xi}$ [**16**].

[2] E. Cartan, Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, 1928, p. 64-65.

sous-groupe invariant abélien g et soient $X_\alpha (\alpha = n + 1, \ldots, n + r)$, r autres transformations formant avec les n premières une base pour le groupe infinitésimal G. On a par hypothèse

$$(X_i X_j) = 0 , \qquad (X_i X_\alpha) = c_{i\alpha}^k X_k , \qquad (X_\alpha X_\beta) = c_{\alpha\beta}^\lambda X_\lambda + c_{\alpha\beta}^k X_k , \tag{7}$$

la sommation par rapport à l'indice latin k s'étendant aux valeurs 1, 2, ..., n, la sommation par rapport à l'indice grec λ s'étendant aux valeurs $n + 1, n + 2, \ldots, n + r$. Les équations de Maurer-Cartan prennent ici la forme

$$\left\{ \begin{aligned} (\omega^\alpha)' &= \frac{1}{2} c_{\lambda\mu}^\alpha [\omega^\lambda \omega^\mu] , \\ (\omega^i)' &= c_{k\alpha}^i [\omega^k \omega^\alpha] + \frac{1}{2} c_{\alpha\beta}^i [\omega^\alpha \omega^\beta] . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Les premières équations (8) sont les équations de Maurer-Cartan du groupe G/g, qui, par hypothèse, satisfait au théorème fondamental; soit G′ le groupe simplement connexe correspondant. On prendra pour ω^α les formes correspondant à ce groupe, qui sont linéairement indépendantes et partout régulières dans l'espace E′ simplement connexe du groupe G′.

Reste à trouver les formes ω^i. Les $c_{k\alpha}^i$ sont les coefficients des substitutions linéaires infinitésimales

$$U_\alpha \equiv c_{k\alpha}^h u^k \frac{\partial f}{\partial u^h} ,$$

qui engendrent un groupe isomorphe de G′, comme le montrent les relations faciles à vérifier

$$(U_\alpha U_\beta) = c_{\alpha\beta}^\lambda U .$$

Soient

$$(u^i)' = A_k^i (\xi) u^k$$

les équations finies de ce groupe, les $A_k^i(\xi)$ étant des fonctions partout régulières dans l'espace E′. Si on substitue aux formes inconnues ω^i les formes

$$\bar{\omega}^i = A_k^i (\xi) \omega^k , \tag{9}$$

un calcul facile[1] montre que les dernières équations (8) deviennent

$$(\overline{\omega}^i)' = \frac{1}{2} A^i_k(\xi)\, c^k_{\alpha\beta}[\omega^\alpha \omega^\beta] \,. \tag{8'}$$

Le second membre est une forme quadratique extérieure partout régulière dans l'espace E′ du groupe G′. D'autre part les équations de Maurer sont localement intégrales, et par suite *le second membre est un élément d'intégrale de différentielle exacte.* Le second nombre de Betti de E′ étant nul, il résulte d'un théorème de M. de Rham [**18**] qu'on peut trouver dans E′ une expression de Pfaff $H^i_\alpha(\xi)\, d\xi^\alpha$ partout régulière dont la dérivée extérieure soit le second membre de (8′). Il suffit alors de poser

$$\overline{\omega}^i = d\eta^i + H^i_\alpha(\xi)\, d\xi^\alpha \,,$$

d'où l'on tire

$$\omega^i = B^i_k(\xi)\, d\eta^k + K^i_\alpha(\xi)\, d\xi^\alpha \;; \tag{10}$$

on a ainsi obtenu, dans l'espace E qui est le produit topologique de E′ et de l'espace euclidien des η^i, $n + r$ formes *indépendantes et partout régulières* satisfaisant aux équations de Maurer. *Mais ici l'intégration qui conduit au groupe des paramètres ne soulève aucune difficulté:* les $(\xi^\alpha)'$ s'expriment au moyen des ξ^α par les fonctions qui définissent le groupe des paramètres de G′; quant aux $(\eta^i)'$, elles sont données par des *quadratures* effectuées dans l'espace simplement connexe E′ des ξ^α. Le Lemme est donc complètement démontré.

Le théorème fondamental ne s'applique qu'aux groupes de Lie simplement connexes; mais la connaissance d'un groupe de Lie simplement connexe entraîne celle des autres groupes infinitésimalement isomorphes par la détermination des sous-groupes proprement discontinus de son centre.

---

[1] En exprimant que les ω^α sont les paramètres de la transformation infinitésimale $a_\xi^{-1} a_{\xi+d\xi}$ du groupe (9), on trouve

$$\frac{\partial A^i_m}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha = A^i_k\, c^k_{m\alpha}\, \omega^\alpha$$

d'où résultent les équations (8′).