Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RELATIONS ENTRE LA TOPOLOGIE ET LA THÉORIE DES INTÉGRALES MULTIPLES

Autor: de Rham, Georges

Kapitel: 1. — Les trois théorèmes généraux.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27312

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

RELATIONS ENTRE LA TOPOLOGIE ET LA THÉORIE DES INTÉGRALES MULTIPLES [1]

PAR

Georges DE RHAM (Lausanne).

Le fait que la Topologie intervient dans des problèmes relatifs aux intégrales multiples a été aperçu déjà par les fondateurs de la topologie des variétés: RIEMANN, BETTI et POINCARÉ, à propos de l'étude des intégrales attachées à une variété algébrique. M. CARTAN, amené sur ce même sujet par ses recherches sur les groupes continus, a formulé pour la première fois d'une manière précise les deux premiers des trois théorèmes dont je vais parler au début, et qui résument, à mon avis, toutes les relations entre la topologie et la théorie des intégrales partout régulières sur une variété close.

1. — LES TROIS THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

Considérons une variété à n dimensions V, close et orientable. Une intégrale p-uple sur cette variété est un nombre

$$I = \int_c \omega$$

qui dépend de deux choses: l'élément différentiel ω et le champ d'intégration c.

---

[1] Conférence faite le 21 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

L'élément ω, que j'appellerai forme de degré p ou p-forme, est une expression de la forme

$$\omega = \sum_{(i_1 \dots i_p)} A_{i_1 i_2 \dots i_p} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_p} ,$$

les A sont des fonctions continues et à dérivées continues des coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ sur V. Le champ d'intégration c, que j'appellerai champ à p dimensions ou p-champ, est formé par une ou plusieurs variétés orientées à p dimensions tracées sur V. Les p-champs peuvent être additionnés, soustraits et multipliés par un entier quelconque.

Ces intégrales jouissent des mêmes propriétés générales que les intégrales curvilignes, de surface ou triples dans l'espace ordinaire, qui en sont des cas particuliers. D'abord, I est fonction linéaire du champ c, et fonction linéaire aussi de la forme ω. Ensuite, on a la formule générale de Stokes

$$\int_c \omega' = \int_{f(c)} \omega ,$$

ω est une p-forme régulière quelconque, c est un $(p + 1)$-champ quelconque, ω' est la $(p + 1)$-forme appelée *dérivée (extérieure) de* ω, $f(c)$ le p-champ frontière de c. Cette formule générale contient comme cas particuliers les formules bien connues d'Ampère-Stokes, de Green et d'Ostrogradsky.

Remarquons ici l'analogie qui existe entre l'opération de dérivation appliquée aux formes et celle du passage à la frontière appliquée aux champs. Elles sont toutes deux linéaires, et répétées deux fois de suite, elles produisent toutes deux zéro:

$$(\omega')' = 0 , \qquad f(f(c)) = 0 .$$

Les champs dont la frontière est nulle sont appelés champs fermés ou *cycles*. Les formes dont la dérivée est nulle sont appelées *exactes*. Par analogie avec la définition des homologies entre les champs, je dirai que deux p-formes ω_1 et ω_2 sont *homologues*, $\omega_1 \sim \omega_2$, si leur différence $\omega_1 - \omega_2$ est identique à la dérivée d'une $(p - 1)$-forme régulière sur toute la variété V.

Un intérêt particulier s'attache aux valeurs que peut prendre

l'intégrale d'une forme exacte étendue à un cycle, valeurs qu'on appelle *périodes*. La formule de Stokes permet de faire une première remarque évidente: *l'intégrale d'une forme exacte étendue à un cycle homologue à zéro est nulle. Etendue à deux cycles homologues entre eux, elle prend deux valeurs égales.*

Si le p-ième nombre de Betti de V est égal à B, on peut trouver, comme on sait, un système de B p-cycles $c_1, c_2, \ldots, c_B$, qui ne sont reliés par aucune homologie et tels que tout p-cycle est homologue à une combinaison linéaire à coefficients entiers de ces B p-cycles. Un tel système est dit fondamental, les cycles qui le constituent seront dits *cycles fondamentaux*.

Il résulte de là que toute période d'une p-forme exacte est égale à une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes relatives aux cycles fondamentaux (ou *périodes fondamentales*).

Existe-t-il des formes exactes, régulières sur toute la variété V, ayant des périodes fondamentales arbitrairement choisies ? La réponse est affirmative et constitue le

THÉORÈME I. — *Il existe toujours une* p-*forme exacte et régulière sur* V, *ayant des périodes fondamentales arbitrairement données à l'avance.*

La formule de Stokes conduit à une seconde remarque évidente: c'est que *les périodes d'une forme homologue à zéro sont toutes nulles.* Le théorème suivant affirme la réciproque.

THÉORÈME II. — *Toute* p-*forme exacte et régulière sur* V, *dont les périodes sont toutes nulles, est la dérivée d'une* (p — 1)-*forme régulière sur* V.

On peut aussi énoncer ces théorèmes de la manière suivante:

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que le* p-*cycle* c *soit homologue à zéro est que*

$$\int_c \omega = 0 .$$

quelle que soit la p-*forme exacte* ω.

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que la* p-*forme exacte* ω *soit homologue à zéro est que*

$$\int_c \omega = 0 \ .$$

quel que soit le p-*cycle* c.

Sous cette forme, ils font penser au théorème suivant (théorème de dualité de Poincaré), avec lequel ils sont en relation étroite. Désignons par $\mathrm{I}(c^p . c^{n-p})$ le nombre algébrique des points d'intersections du p-cycle c^p avec le $(n - p)$-cycle c^{n-p}. Alors: *la condition nécessaire et suffisante pour que le cycle* c^{p} *soit homologue à zéro, c'est que* $\mathrm{I}(\mathrm{c}^{\mathrm{p}} . \mathrm{c}^{\mathrm{n-p}}) = 0$ *quel que soit le cycle* $\mathrm{c}^{\mathrm{n-p}}$.

Généralisons un peu la notion de cycle, en donnant encore ce nom aux combinaisons linéaires à coefficients constants quelconques (et non nécessairement entiers) de cycles ordinaires. Le symbole $\mathrm{I}(c^n . c^{n-p})$ conserve sa signification, mais il n'est plus nécessairement égal à un nombre entier. Il résulte du théorème de Poincaré qu'à toute p-forme exacte ω on peut associer un $(n - p)$-cycle c^{n-p} tel que

$$\int_{c^p} \omega = \mathrm{I}(c^p \cdot c^{n-p})$$

quel que soit le p-cycle c^p. Il est clair que ce cycle associé n'est déterminé qu'à une homologie près, et que sa connaissance équivaut à celle des périodes fondamentales de ω.

En tenant compte du théorème de Poincaré, le contenu de nos deux théorèmes revient alors à ceci :

I. *A tout* (n — p)-*cycle correspond une* p-*forme exacte associée.*

II. *Pour qu'une* p-*forme exacte soit homologue à zéro, il suffit que le* (n — p)-*cycle associé le soit.*

De deux formes ω_1 et ω_2, de degrés p et q, on déduit une forme bien déterminée de degré $p + q$, leur produit (extérieur) $\omega_1 \omega_2$. Si ω_1 et ω_2 sont des formes exactes, le produit l'est aussi. Il est

alors naturel de se demander comment les périodes du produit dépendent de celles des facteurs. La réponse est fournie par le

THÉORÈME III. — *Si* c_1 *et* c_2 *sont les cycles associés à* ω_1 *et* ω_2, *le cycle associé au produit* $\omega_1 \omega_2$ *est le cycle* $c_2 \cdot c_1$ *intersection de* c_2 *avec* c_1.

Supposons en particulier que $q = n - p$; le produit $\omega_1 \omega_2$ est alors une n-forme dont la seule période fondamentale est

$$\int_V \omega_1 \omega_2$$

et le théorème III se réduit à l'égalité

$$\int_V \omega_1 \omega_2 = I(c_2 \cdot c_1) .$$

En combinant cette égalité avec le théorème de dualité de Poincaré, on obtient le résultat suivant:

Pour que la p-*forme exacte* ω_1 *soit homologue à zéro, il faut et il suffit que*

$$\int_V \omega_1 \omega_2 = 0 ,$$

quelle que soit la (n — p)-*forme exacte* ω_2.

2. — APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS.

Voici une application intéressante de ce dernier résultat. Supposons que V soit la riemannienne à 4 dimensions qui correspond à une surface algébrique, et ω_1 l'élément d'une intégrale double de première espèce attachée à cette surface. Si ω_2 est l'imaginaire conjuguée de ω_1, on voit immédiatement que

$$\int_V \omega_1 \omega_2 > 0 .$$

Donc ω_1 ne peut pas être homologue à zéro: *une intégrale double de première espèce ne peut pas avoir toutes ses périodes nulles.*