3. — Principe de la démonstration du théorème I.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

d'une fonction uniforme sur une surface donnée S, dont le laplacien soit égal à une fonction donnée f telle que $\int_S f d\sigma = 0$.

3. — Principe de la démonstration du théorème I.

Considérons, pour fixer les idées, une variété à 3 dimensions sur laquelle on a un cycle à 2 dimensions c^2 non homologue à zéro. Il s'agit de construire une forme exacte de degré 2, régulière sur toute la variété, dont la période relative à c^2 ne soit pas nulle. Une telle forme

$$\omega = A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$$

peut être considérée comme l'expression du débit élémentaire d'un courant électrique (stationnaire) de volume, son intégrale étendue à un champ c à 2 dimensions est alors le débit total à travers c et la condition que la forme soit exacte ($\omega' = 0$ ou $A'_x + B'_y + C'_z = 0$) exprime que le courant est conservatif. Notre problème consiste donc à construire un courant de volume, régulier et conservatif sur toute la variété, dont le débit total à travers c^2 ne soit pas nul.

D'après le théorème de dualité de Poincaré, il existe un cycle à une dimension c^1, dont le nombre algébrique des points d'intersections avec c^2 n'est pas nul: $I(c^2 . c^1) \neq 0$. Imaginons que les lignes constituant c^1 (lignes fermées et orientées) soient des fils métalliques parcourus par un courant électrique d'intensité constante égale à un. Le débit de ce courant à travers c^2 est égal à $I(c^2 . c^1)$, donc non nul. Ce courant est d'ailleurs conservatif (car c^1 est fermé). On conçoit ensuite la possibilité d'étaler un peu ce courant, de manière qu'il remplisse une sorte de tube entourant c^1, avec une intensité de volume continue à l'intérieur du tube et nulle sur sa frontière. La forme ω, égale au débit élémentaire de ce courant dans le tube et nulle en dehors, satisfait à toutes les conditions requises.

On voit que, dans l'espace ordinaire, une même entité physique (le courant électrique), est représentée dans un cas par un champ à une dimension (courant linéaire), dans un autre cas par une forme de degré deux (courant de volume). Cela

suggère l'idée que dans une variété à n dimensions V, un p-champ et une $(n - p)$-forme doivent être deux aspects d'une même notion plus générale, que j'appellerai courant à p dimensions. Telle est l'idée qui m'a conduit à la démonstration des trois théorèmes dont on vient de parler. Je vais maintenant esquisser la théorie de ces courants et montrer comment elle conduit de manière très naturelle à la théorie des résidus d'intégrales doubles.

4. — Théorie des courants.

Définitions. — Un p-*courant élémentaire* est l'ensemble (c^{p+k}, ω^k) d'un $(p + k)$-champ c^{p+k} et d'une k-forme ω (définie au moins sur c^{p+k}). p est la dimension du courant. Comme $0 \leq p + k \leq n$ et $0 \leq k \leq n$, l'entier k ne peut prendre que les $n - p + 1$ valeurs $0, 1, \ldots, (n - p)$; il y a $(n - p + 1)$ types de p-courants élémentaires.

Un p-*courant* est la réunion d'un nombre fini de p-courants élémentaires.

Addition et multiplication par un nombre. — La *somme* $C_1 + C_2$ de deux p-courants C_1 et C_2 est le p-courant formé par la réunion des p-courants élémentaires constituant C_1 et C_2.

Le *produit* du p-courant élémentaire $C = (c, \omega)$ par le nombre λ est le p-courant élémentaire $C = (c, \lambda\omega)$. Pour multiplier un courant quelconque par λ, on multipliera chacun des courants élémentaires qui le constitue par λ.

Conventions de simplification.

$$(c, \omega) = 0 \quad \text{si} \quad c = 0 \quad \text{ou si} \quad \omega = 0 \quad \text{sur } c .$$

$$(\lambda c, \omega) = \lambda (c, \omega) .$$

$$(c_1, \omega) + (c_2, \omega) = (c_1 + c_2, \omega) . \quad (c, \omega_1) + (c, \omega_2) = (c, \omega_1 + \omega_2) .$$

Produit de deux courants. — Le produit du p-courant élémentaire (c^{p+k}, ω^k) par le q-courant élémentaire (c^{q+l}, ω^l) est le $(p + q - n)$-courant élémentaire.

$$(c^{p+k}, \omega^k)(c^{q+l}, \omega^l) = (-1)^{k(n-q-l)} (c^{p+k} \cdot c^{q+l}, \omega^l \omega^k)$$