5. — Théorie des résidus.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5. — Théorie des résidus.

Nous avons supposé que les formes ω introduites dans la théorie des courants étaient partout régulières sur la variété V. Si l'on admet des formes qui présentent des singularités, pour que les lois essentielles de la théorie subsistent, la définition du dérivé doit être complétée. Lorsque ω présente des singularités, le dérivé de (V, ω) se compose non seulement de (V, ω') — ce qui serait le cas si ω était régulière —, mais encore d'autres termes provenant des singularités de ω et qu'on peut appeler les résidus de ω.

Je vais examiner à ce point de vue les formes différentielles algébriques dans le domaine complexe, ce qui nous conduira à la théorie des résidus de Cauchy et de Poincaré. Cette étude est basée sur la formule suivante.

Soient C_1 et C_2 deux courants dont la somme des dimensions est $(n+1)$, n étant la dimension de la variété considérée; $C_1 . C_2$ est alors un 1-courant, et l'indice de son dérivé $d(C_1 . C_2)$ est nul, ce qui donne

$$I(C_1 dC_2) = \pm I(C_2 dC_1) . \qquad \text{(A)}$$

Cette formule est très importante. Si C_1 et C_2 sont des champs, elle traduit la pseudo-commutativité du coefficient d'enlacement des deux cycles dC_1 et dC_2. Si C_1 et C_2 sont des formes, c'est la formule d'intégration par parties. Si C_1 est un champ et C_2 une forme, c'est la formule de Stokes. Dans les cas que nous allons examiner, elle se réduira aux formules des résidus de Cauchy et Poincaré.

Considérons d'abord une différentielle rationnelle $f(z)dz$ sur la sphère de Riemann S de la variable complexe z. Soient $z_k (k = 1, 2, ...)$ ses points singuliers, r_k les résidus correspondants. Nous définissons le dérivé du 1-courant $C^1 = (S, f(z)dz)$ par la formule

$$dC^1 = \sum_k (z_k, 2i\pi r_k) .$$

Soit c^2 un domaine sur S (ou 2-champ) de frontière c^1; c^2 est un 2-courant dont le dérivé est c^1. Appliquons la formule (A). On a

$$C^1 \cdot dc^2 = (S, f(z)\,dz) \cdot (c^1, 1) = -(c^1, f(z)\,dz) ,$$

donc

$$I(C^1 \cdot dc^2) = \int_{c^1} f(z)\,dz .$$

Ensuite

$$c^2 \cdot dC^1 = (c^2, 1) \cdot \sum_k (z_k, 2i\pi r_k) = \sum_k (c^2 \cdot z_k, 2i\pi r_k) .$$

Comme $c^2 . z_k = z_k$ ou 0 suivant que z_k est à l'intérieur ou à l'extérieur de c^2, il vient

$$I(c^2 \cdot dC^1) = 2i\pi \text{ (somme des résidus intérieurs à } c^2)$$

et la formule (A) se réduit à la formule des résidus de Cauchy. La formule $I(dC^1) = 0$ exprime que la somme des résidus est nulle.

Considérons ensuite un élément d'intégrale double

$$\omega = f(x, y)\,dx\,dy ,$$

$f(x, y)$ étant une fonction rationnelle, x et y des coordonnées non homogènes dans le plan projectif complexe V à 4 dimensions réelles. Sa dérivée est nulle, mais elle a des points singuliers qui forment un nombre fini de courbes algébriques (donc des 2-champs) S_1, S_2, S_3, ... Ce sont les courbes polaires de la fonction $f(x, y)$ et éventuellement la droite de l'infini.

Poincaré a montré qu'à chacune de ces courbes est attachée une différentielle abélienne déterminée par ω. Si par exemple $f = \frac{P(xy)}{Q(xy)\,R(xy)}$, P, Q, R étant des polynômes, la différentielle attachée à la courbe $Q = 0$ est

$$\frac{2i\pi P \cdot dx}{R\frac{\partial Q}{\partial y}} .$$

Soit ω_k la différentielle attachée à S_k. Nous définissons le dérivé du 2-courant $C^2 = (V, \omega)$ par la formule

$$dC^2 = \sum_k (S_k, \omega_k) .$$

Soit c^3 un champ à 3 dimensions sur V, dont la frontière c^2 ne rencontre pas les courbes singulières S_k. c^3 est un 3-courant dont le dérivé est c^2. Appliquons la formule (A). On a

$$C^2 \cdot dC^3 = (V, \omega) \cdot (c^2, 1) = (c^2, \omega) ,$$

d'où

$$I(C^2 \cdot dC^3) = -\int_{c^2} \omega .$$

Ensuite

$$C^3 \cdot dC^2 = (c^3, 1) \cdot \sum_k (S_k, \omega_k) = \sum_k (c^3 \cdot S_k, \omega_k) ,$$

d'où

$$I(C^3 \cdot dC^2) = -\sum_k \int_{c^3 . S_k} \omega_k$$

et la formule (A) devient

$$\int\int_{c^2} f(xy)\, dx\, dy = \pm \sum_k \int_{c^3 . S_k} \omega_k .$$

C'est la formule de réduction (de Poincaré) d'une période polaire d'intégrale double à des périodes (polaires ou cycliques) des intégrales abéliennes attachées aux courbes S_k.

En résumé, si les résidus d'une intégrale simple attachée à une courbe algébrique apparaissent comme un système de points affectés de coefficients, les résidus d'une intégrale double attachée à une surface algébrique se présentent sous la forme d'un système de courbes algébriques affectées d'intégrales simples. Plus généralement, les résidus d'une intégrale p-uple attachée à une variété algébrique à n dimensions (complexes) apparaissent comme un système de variétés algébriques à $(n - 1)$ dimensions (complexes) affectées d'intégrales $(p - 1)$-uples.