LA NOTION DE CONNEXITÉ LOCALE EN TOPOLOGIE

Autor(en): **Kuratowski, Casimir**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-27313

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LA NOTION DE CONNEXITÉ LOCALE EN TOPOLOGIE [1]

PAR

Casimir KURATOWSKI (Varsovie).

Il y a une dizaine d'années la Topologie était divisée en deux parties: la Topologie « ensembliste » et la Topologie « combinatoire ». La première, édifiée sur le terrain de la théorie des ensembles de Georg CANTOR, avait pour objet l'étude des propriétés topologiques des ensembles de points les plus généraux, la deuxième, fondée sur les idées de Henri POINCARÉ: celles d'homologies, de groupe de Betti, du groupe fondamental, concernait les polyèdres ou polytopes à n dimensions. La deuxième semblait inapplicable dans l'étude des ensembles arbitraires (autres que les polytopes), tandis que la première paraissait impuissante en face de l'étude de certaines propriétés topologiques extérieures des figures géométriques situées dans l'espace euclidien à $n > 2$ dimensions, telles que le nombre des domaines complémentaires, enlacements d'ensembles, etc.

Les deux topologies se développaient indépendamment l'une de l'autre: non seulement les objets de leurs études étaient différents, mais il y avait aussi une différence frappante entre leurs méthodes: l'une était finitiste, l'autre était par contre liée à la notion de continuité.

Dès lors l'état des choses a complètement changé. En s'inspirant des idées de M. BROUWER, MM. ALEXANDROFF et VIETORIS ont réussi à définir dans le domaine de la topologie ensembliste (pour les espaces compacts les plus généraux) les notions combi-

---

[1] Conférence faite le 22 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

natoires d'homologie, de groupe de Betti, d'enlacements, etc. Ainsi « unifiée » [1] et enrichie de nouvelles méthodes, la topologie a pu attaquer des problèmes qui paraissaient jusqu'ici inabordables. Elle n'est pas non plus sans intérêt pour l'étude des figures aussi régulières que les polytopes: il y a en effet des propriétés dont l'étude demande la considération de certains autres espaces (par ex. des espaces des transformations, H. Hopf, W. Hurewicz) qui, en général, sont non-compacts, ont un nombre infini de dimensions et qui rentrent dans le domaine de la topologie ensembliste.

A l'heure actuelle les deux topologies, ensembliste et combinatoire, se confondent de plus en plus. Une délimitation rigoureuse entre elles ne paraît plus applicable et d'autres critères commencent à intervenir dans la classification des méthodes topologiques (par ex. homologie, homotopie, groupe des transformations en circonférence, etc.). En particulier, la théorie de la connexité locale, qui constitue le sujet de cette conférence, est un chapitre de la topologie unifiée, où l'ancienne distinction ne semble plus possible.

1. — *Connexité en Topologie ensembliste.* — La notion de connexité est une des notions fondamentales de la Topologie ensembliste. Rappelons sa définition: un ensemble est dit connexe s'il ne se décompose pas en deux ensembles fermés dans lui (non vides) et sans point commun. La notion de connexité étant intrinsèque, on peut considérer au lieu d'« ensemble connexe » l'« espace connexe ». Soit, en effet, E un espace métrique donné [2], c'est-à-dire espace où la distance $|a - b|$ de chaque couple de points a et b est définie; l'espace E est dit connexe lorsqu'il ne se décompose pas en deux ensembles fermés sans point commun. Si cet espace est, en outre, compact (c'est-à-dire que chaque ensemble infini admet un point d'accumulation), il est dit un *continu.* Telles sont, en particulier, les lignes et les surfaces bornées considérées en géométrie.

---

1 Cf. la conférence très intéressante de M. Wilder sur la Topologie unifiée publiée dans le *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1932.

2 Par espace nous entendons ici toujours un espace métrique séparable (c'est-à-dire admettant un ensemble dense dénombrable).

La localisation de la définition précédente conduit à la connexité locale: un espace est dit *localement connexe au point* p lorsqu'il existe un entourage connexe de p aussi petit qu'on le veut. Tel est, par exemple, le plan euclidien, le cercle de centre p et de rayon ε étant connexe. Il en est encore de même des polyèdres ou polytopes, mais il n'en est pas ainsi de la courbe $y = \sin 1/x$, $0 < x \leq 1$, augmentée de l'intervalle -1, $+1$ de l'axe des y; aux points de cet intervalle la courbe n'est pas localement connexe.

La notion de connexité locale, introduite indépendamment par HAHN et par M. MAZURKIEWICZ, a servi, à côté de la connexité même (qui remonte à C. JORDAN), de point de départ de nombreuses recherches topologiques et a permis d'approfondir l'étude de la structure d'ensembles de points (pour ne citer que la théorie des courbes [1]).

Parmi les nombreux théorèmes de la théorie de la connexité locale, citons les deux suivants: la condition suffisante et nécessaire pour qu'un continu soit localement connexe, est qu'il soit une image continue d'un intervalle [2]. Ainsi, la propriété du carré d'admettre une représentation paramétrique continue sur l'intervalle, propriété découverte par PEANO et qui paraissait tellement paradoxale, s'est montrée une propriété caractéristique des continus localement connexes (continus nommés à présent « *péaniens* »).

La deuxième propriété est la *connexité par arcs* intégrale et locale des continus péaniens: à savoir, chaque couple de points d'un continu péanien se laisse unir dans ce continu par un arc (c'est-à-dire par un ensemble homéomorphe à l'intervalle); de plus, si les deux points en question sont suffisamment voisins, l'arc peut être supposé aussi petit qu'on le veut [3].

La notion de continu péanien définit dans la variété de tous les ensembles de points une famille d'ensembles qui se distinguent par certaines régularités (elles se manifestent, par exemple, dans les deux théorèmes précités). Cette régularité est surtout

---

[1] Voir K. MENGER, « Kurventheorie », Leipzig-Berlin, 1932.

[2] Cf. W. SIERPINSKI, *Fund. Math.*, I (1920), p. 44 et S. MAZURKIEWICZ, *ibid.*, p. 166.

[3] S. MAZURKIEWICZ, *ibid.*, p. 201 et R. L. MOORE, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 23 (1917), p. 233.

visible lorsqu'il s'agit des propriétés intrinsèques des ensembles considérés. En ce qui concerne leurs propriétés extérieures, c'est-à-dire lorsqu'on suppose le continu péanien immergé dans l'espace euclidien à n dimensions, le cas $n = 2$ diffère complètement du cas $n > 2$. Ainsi, par exemple[1], si C est un continu péanien situé sur le plan, la frontière de chaque domaine complémentaire de C est un continu péanien et chaque point de cette frontière est accessible du domaine considéré; si, en particulier, C est la frontière de deux domaines complémentaires, elle est une courbe simple fermée. Aucune de ces propriétés ne se laisse étendre à l'espace euclidien à 3 dimensions; en passant du plan à l'espace à 3 dimensions, l'hypothèse de la connexité locale est devenue bien moins efficace pour l'étude des propriétés extrinsèques[2]. De ce point de vue on trouvera avantageux de se servir de la notion de connexité locale *en dimension* n, dont nous nous occuperons à présent.

2. — *Connexité locale en dimension* n. — Désignons par S_n la sphère à n dimensions, à savoir l'ensemble des points de l'espace euclidien à $n + 1$ dimensions tels que $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$. En remplaçant dans la définition précédente le signe $=$ par $\leqq$, on définit le sphéroïde (massif) à $n + 1$ dimensions, que nous désignons par Q_{n+1}.

Disons, pour l'instant, qu'un espace Y est *connexe en dimension n* lorsque chaque transformation continue f de la sphère S_n en sous-ensemble de Y se laisse étendre en une transformation continue f^* du sphéroïde Q_{n+1} tout entier (en sous-ensemble de Y). On voit aussitôt que la connexité en dimension 0 n'est autre chose que la connexité par arcs, considérée auparavant (puisque Q_1 désigne un intervalle et S_0 le couple de ses extrémités). Pour avoir un exemple d'un ensemble qui n'est pas connexe en dimension 1, considérons la circonférence S_1 du cercle Q_2: en admettant pour f l'identité, on constate facilement

[1] Cf. SCHÖNFLIESS, « Bericht über die Entwicklung der Mengenlehre, II », Leipzig, 1908, p. 199 et ss., B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, IV (1925), p. 164, H. HAHN, M. TORHORST, *Math. Zft.*, 9 (1921) et ma note des *Fund. Math.*, 16 (1930), p. 180.

[2] Cela tient, entre autres, au fait que *chaque* ensemble compact devient péanien par l'adjonction d'une suite infinie d'arcs simples (qui n'altère pas en général les propriétés extérieures de l'ensemble donné, dans l'espace à $n > 2$ dimensions).

qu'il n'existe aucune transformation du cercle en circonférence qui soit une identité sur cette circonférence. D'une façon générale S_n est connexe en dimensions $k < n$ mais n'est pas connexe en dimension n.

La définition précédente peut être aussi formulée en termes de l'*homotopie*. L'espace Y est connexe en dimension n lorsque chaque transformation f de la sphère S_n en sous-ensemble de Y est homotope à 0, c'est-à-dire se laisse réduire à une constante par une déformation continue; plus précisément, lorsqu'il existe une fonction continue φ de deux variables: x parcourant S_n et t parcourant l'intervalle 01, telle que la fonction $\varphi(x, 0)$ coïncide avec $f(x)$ et que la fonction $\varphi(x, 1)$ soit une constante[1].

La localisation de la définition précédente conduit à la définition de la *connexité locale en dimension n au point p*[2]. Cette propriété appartient à l'espace Y lorsqu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que, chaque transformation continue f de S_n en sous-ensemble de Y assujettie à l'inégalité $|f(x) - p| < \eta$, admette une extension f^* telle que $|f^*(x) - p| < \varepsilon$ où x parcourt Q_{n+1} (ce qui revient à dire que l'homotopie de la fonction f à la constante p se laisse effectuer sur un chemin très petit).

On constate, comme auparavant, que la connexité locale en dimension 0 coïncide avec la connexité locale par arcs. En particulier, les espaces compacts connexes et localement connexes en dimension 0 coïncident avec les espaces péaniens. Cela donne lieu à la dénomination suivante: un espace est dit *péanien en dimension* n lorsqu'il est connexe et localement connexe en dimension n.

A chaque espace Y on peut faire correspondre un coefficient entier $c(Y)$ (ou $c_l(Y)$), à savoir la plus grande dimension n jusqu'à laquelle Y est péanien (ou localement connexe). Dans le cas où l'espace Y est péanien en chaque dimension, le coeffi-

---

[1] Pour s'en convaincre on pose $f^*[x.(1 - t)] = \varphi(x, t)$.

[2] Cette notion est due à M. LEFSCHETZ. Voir « Topology », New-York, 1930, p. 91. A côté de cette définition on peut considérer la connexité locale « au sens de l'homologie », en entendant par cela que chaque petit cycle n-dimensionnel est homologue à 0 dans un petit voisinage du point p. Cette notion est due à M. ALEXANDER et à M. ALEXANDROFF (voir « Gestalt u. Lage », *Annals of Math.*, 30, 1928, p. 81). Tout récemment elle fut étudiée par M. ALEXANDROFF dans *Annals of Math.*, 36 (1935), p. 1 et par M. CECH dans *Compos. Math.*, 2 (1935), p. 1.

Cf. aussi WHYBURN, *Fund. Math.*, 25 (1935), p. 408.

cient $c(Y)$ est infini. Comme on verra, deux genres d'infinités peuvent se présenter.

3 [1]. — *Extensions des fonctions continues.* — Afin d'abréger l'écriture, nous allons nous servir du symbole Y^X pour désigner la famille de toutes les transformations continues de l'espace X en sous-ensembles de Y. Comme nous avons vu, la connexité en toutes les dimensions $\leqq n$ s'exprime par l'hypothèse, qu'à chaque fonction f appartenant à Y^{S_k} correspond une extension f^* appartenant à $Y^{Q_{k+1}}$, quel que soit $k \leqq n$. Or, si l'on remplace dans cette condition Q_{k+1} par un espace métrique séparable X tout-à-fait arbitraire et S_k par un sous-ensemble fermé A de X tel que $\dim(X - A) \leqq n + 1$ [2], on parvient à une condition qui caractérise les espaces péaniens en dimensions $k \leqq n$ (condition qui ne fait intervenir aucun élément étranger à la topologie ensembliste). En d'autres termes, l'inégalité $c(Y) \geqq n$ équivaut à l'hypothèse suivante: A étant un sous-ensemble fermé d'un espace métrique séparable X assujetti à la condition $\dim(X - A) \leqq n + 1$, à chaque fonction f dans Y^A correspond une extension f^* dans Y^X. Si cette extension est toujours possible, sans que l'on fasse l'hypothèse sur la dimension de X — A, nous posons $c(Y) = \aleph_0$; si ceci a lieu pour chaque n fini, nous posons $c(Y) = \omega$.

Les deux cas infinis peuvent se présenter effectivement: d'après un théorème connu de M. Tietze, chaque fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique se laisse étendre sur l'espace métrique tout entier; donc Y désignant la droite, $c(Y) = \aleph_0$. D'autre part, pour avoir un espace Y tel que $c(Y) = \omega$, considérons — avec M. Borsuk — dans l'espace de Hilbert à une infinité de dimensions une suite infinie de sphères S_0, S_1, ... placées de manière que chaque sphère n'ait qu'un seul point commun avec la suivante et que la suite converge vers un point p situé en dehors de cette suite. Soit q le point (1, 0, 0, 0, ...), l'abscisse de chaque

---

[1] Pour les énoncés des nos 3-7, voir ma note des *Fund. Math.*, 24 (1935), p. 269, où l'on trouvera les renvois bibliographiques nécessaires.

[2] Le symbole dim X désigne la dimension de l'ensemble X dans le sens de Menger-Urysohn.

S_n étant supposée nulle. L'ensemble Y se compose de tous les segments unissant q aux points des sphères S_n, ainsi que du segment qp. Ici $c(Y) = \omega$.

En ce qui concerne la connexité locale, on montre que l'inégalité $c_l(Y) \geqq n$ équivaut à l'hypothèse que, A, X et f ayant le même sens qu'auparavant, il existe dans X un entourage E de A et une extension f^* de f qui appartient à Y^E. Tout comme auparavant on doit distinguer entre $c_l(Y) = \omega$ et $c_l(Y) = \aleph_0$. Un problème non-résolu, fort intéressant, qui s'y rattache, est le suivant: l'égalité $c_l(Y) = \aleph_0$, est-elle une conséquence de la connexité locale *uniforme* en toutes les dimensions n ? [1] (nous entendons par cela qu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel qu'à chaque fonction f dans Y^{S_n} satisfaisant [2] à $\delta[f(S_n)] < \eta$ correspond une fonction f^* telle que $\delta[f^*(Q_{n+1})] < \varepsilon$).

4. — *Rétraction des ensembles.* — Un autre critère des ensembles péaniens en dimension n (ou bien localement connexes) se laisse énoncer à l'aide de la notion très utile de « rétraction », due à M. Borsuk [3]. Rappelons la définition: un sous-ensemble Y de X en est un rétracte lorsque X se laisse transformer en Y à l'aide d'une fonction continue f telle que $f(x) = x$ pour chaque x appartenant à Y. Par exemple, le cercle est un rétracte du plan qui le contient; tandis que la circonférence n'est pas un rétracte du cercle [4].

Or, on démontre que l'inégalité $c(Y) \geqq n$ équivaut à l'hypothèse que Y est un rétracte de chaque espace X qui le contient, dans lequel Y est fermé et pour lequel on a $\dim(X - Y) \leqq n + 1$. En particulier, l'égalité $c(Y) = \aleph_0$ équivaut à l'hypothèse que Y est un rétracte de *chaque* sur-espace dans lequel Y est fermé (Y est nommé dans ce cas, selon M. Borsuk, un rétracte « absolu »).

---

[1] Ce problème est traité par M. Lefschetz dans *Annals of Math.*, 35 (1934), p. 118.

[2] $\delta(X)$ désigne le diamètre de l'ensemble X, c'est-à-dire la borne supérieure des distances entre ses éléments.

[3] *Fund. Math.*, 17 (1931), p. 153.

[4] D'une façon générale, pour qu'un sous-ensemble fermé Y d'un espace compact X en soit un rétracte, il faut et il suffit que l'espace X se laisse métriser (sans altérer sa topologie) de façon qu'à chaque point x de X corresponde un et un seul point $f(x)$ de Y qui soit le plus rapproché parmi les points de Y. Voir ma Note qui paraîtra dans les *C. R. de la Soc. des Sc. de Varsovie* (1936).

On parvient à une condition qui équivaut à l'inégalité $c_l(Y) \geqq n$ en supposant que Y est un rétracte, non de l'espace X tout entier mais d'un de ses entourages (dans X). L'égalité $c_l(Y) = \aleph_0$ signifie que dans chaque sur-espace X dans lequel Y est fermé il existe un entourage de Y dont Y est un rétracte (c'est donc un rétracte « absolu de voisinage »).

5. — *Opérations.* — Nous allons tâcher de répondre à présent aux problèmes suivants: étant donnés les coefficients c des ensembles A et B, calculer les coefficients $c(A + B)$, $c(A \times B)$, $c(A^B)$ etc. De même pour c_l.

Dans cet ordre d'idées on a d'abord le théorème suivant: A *et* B *étant deux ensembles fermés dans leur somme* A + B, *les inégalités* $c(A) \geqq n$, $c(B) \geqq n$, $c(AB) \geqq n - 1$, *entraînent* $c(A + B) \geqq n$.

Le théorème reste valable lorsqu'on substitue $\aleph_0$ à n [1]. On peut aussi remplacer le coefficient c par c_l.

Ainsi, par exemple, en décomposant la sphère S_n par l'« équateur » S_{n-1} en deux hémisphères, on conclut du théorème précédent par induction que $c(S_n) \geqq n - 1$. Le fait, qui intervient dans cette démonstration, que le coefficient c pour l'hémisphère est $\geqq n - 1$, même plus encore, qu'il est égal à $\aleph_0$, est une conséquence de la propriété de Q_n (qui est homéomorphe à l'hémisphère considérée) d'être un rétract absolu. L'égalité $c(Q_n) = \aleph_0$ résulte aussi du théorème suivant.

Avant de l'énoncer, remarquons encore que $c(S_n) < n$, donc que $c(S_n) = n - 1$. En effet, si $c(S_n)$ était $\geqq n$, S_n serait un rétracte de Q_{n+1}. Mais alors, la rétraction et la transformation antipodique de S_n donneraient une transformation continue de Q_{n+1} en S_n sans point invariant, — ce qui, d'après un théorème classique de M. Brouwer, est impossible.

Passons, à présent, à l'opération du *produit cartésien.* Le produit cartésien de deux espaces métriques X et Y est l'espace des couples (x, y) métrisé par la formule adoptée en géométrie analytique. Une généralisation convenable de cette formule permet d'étendre la notion de produit cartésien à un nombre fini

[1] Cf. N. Aronszajn et K. Borsuk, *Fund. Math.*, 18 (1932), p. 194.

arbitraire ou même à une suite infinie de facteurs. Or, on démontre que

$$c(Y_1 \times Y_2 \times \ldots) = \min c(Y_i) \quad \text{et} \quad c_l(Y_1 \times Y_2) = \min\left[c_l(Y_1)\,,\ c_l(Y_2)\right].$$

La deuxième formule ne se généralise pas à une suite infinie de facteurs, comme le montre l'exemple de l'ensemble non-dense de Cantor qui peut être regardé comme la « puissance $\aleph_0$-ème » d'un ensemble composé de deux éléments (donc ayant le coefficient $c_l = \aleph_0$).

La puissance Y^X désigne, comme nous l'avons déjà dit, l'espace des transformations continues de l'espace X en sous-ensembles de Y. L'espace X étant supposé compact, la distance entre deux fonctions-éléments de Y^X est donnée par la formule $|f - g| = \max |f(x) - g(x)|$ [1]. Or, on a la formule remarquable suivante

$$c(Y^X) \leqq c(Y) \leqq c(Y^X) + \dim X\,.$$

La formule reste valable en remplaçant le coefficient c par c_l. Dans le cas où $c(Y) = \aleph_0$, on a $c(Y^X) = \aleph_0$; si $c_l(Y) = \aleph_0$, on a $c_l(Y^X) = \aleph_0$. Ainsi, par exemple, l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle (ou sur un espace compact arbitraire) est un rétracte absolu. L'espace des transformations d'un espace compact arbitraire en sous-ensembles d'un polytope est un rétract absolu de voisinage ($c_l = \aleph_0$).

Remarquons enfin que la connexité en dimension n de l'espace Y se ramène à la connexité par arcs des espaces fonctionnels $Y^{S_0}, \ldots, Y^{S_n}$. En effet, la connexité locale par arcs de tous ces espaces est une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $c_l(Y) \geqq n$; en admettant en outre la connexité intégrale par arcs, on obtient une condition équivalente à l'inégalité $c(Y) \geqq n$.

6. — *Rapport avec l'homologie.* — On démontre facilement que, Y étant un espace compact arbitraire, *l'inégalité* $c(Y) \geqq n$

---

[1] Les formules suivantes justifient l'emploi de la notation Y^X:

$$Y^X \times Z^X \backsim (Y \times Z)^X\,, \quad (Y^X)^Z \backsim Y^{X \times Z}\,, \quad Y^A \times Y^B \backsim Y^{A+B}\,,$$

où A et B sont fermés et disjoints et où $\backsim$ désigne l'homéomorphie.

implique que tous les groupes d'homologie d'ordres $\leqq$ n *s'annulent.* La réciproque n'est pas vraie: le polytope bien connu de POINCARÉ dont les nombres de Betti de dimension 0 et 1 s'annulent et dont le groupe fondamental ne s'annule pas n'est pas péanien en dimension 1 (bien qu'il le soit « dans le sens de l'homologie »). Dans cet ordre d'idées un résultat fort remarquable a été trouvé tout récemment par M. HUREWICZ [1]: dans l'hypothèse que $c(Y) \geqq 1$, le fait que tous les groupes d'homologie d'ordres $\leqq n$ s'annulent implique (est donc équivalent à) l'inégalité $c(Y) \geqq n$.

Des rapports analogues ont lieu entre le coefficient c_l et la connexité locale au sens de l'homologie. Ajoutons que l'inégalité $c_l(Y) \geqq n$ implique que les nombres de Betti de dimensions $\leqq n$ de Y sont finis [2].

7. — *Rapport avec l'homotopie des ensembles.* — Un ensemble est dit homotope à un point dans un espace donné lorsqu'il se laisse réduire dans cet espace au point considéré par une déformation continue. Si chaque ensemble fermé de dimension n est homotope à un point, l'espace est dit contractile en dimension n. L'homotopie d'un ensemble étant un cas particulier de l'homotopie des fonctions (cas où la fonction est une identité), l'inégalité $c(Y) \geqq n$ entraîne la contractilité (intégrale et locale) de l'espace Y en dimensions $\leqq n$. La réciproque n'est pas vraie: l'exemple suivant dû à M. BORSUK [3], est un espace compact E à 3 dimensions, contractile localement (on a même $c_l(E) = \aleph_0$), contractile intégralement en dimensions $\leqq 2$ et, cependant, non péanien en dimension 2; plus encore, le deuxième nombre de Betti de E est égal à 1. Pour obtenir l'ensemble E, on transforme d'abord un arc L situé sur la surface sphérique S_2 en Q_3 par une transformation continue f et on identifie ensuite, pour chaque point y de Q_3, tous les x tels que $f(x) = y$ (plus précisément, E est l'espace de la décomposition de S_2 en points individuels de

---

[1] A paraître dans le volume jubilaire des *Fund. Math.* (25).

[2] Plus encore: leurs groupes de Betti sont des images homéomorphes des groupes correspondants d'un polytope à n dimensions. Voir K. BORSUK, *Fund. Math.*, 24 (1935), p. 311.

[3] *Ibid.*, p. 257.

l'ensemble $S_2 - L$ et en ensembles $f^{-1}(y)$ où y parcourt l'ensemble Q_3).

On voit ainsi combien la condition d'homotopie de fonctions est plus restrictive que celle d'homotopie d'ensembles. Reste à remarquer que dans le cas particulier où l'espace compact Y (supposé de dimension finie) est localement contractile en toute dimension, on a $c_l(Y) = \aleph_0$; et, s'il en est, en outre, ainsi de la contractilité intégrale, il vient $c(Y) = \aleph_0$. Le problème — si l'hypothèse de dimension finie de Y peut être omise dans le dernier énoncé — reste ouvert; il se rattache à celui de la connexité locale uniforme (du n° 3).

8. — *Propriétés extérieures des ensembles localement connexes plongés dans l'espace euclidien à* n *dimensions.* — Ces propriétés n'ont été étudiées jusqu'à présent que dans le cas où l'ensemble fermé considéré F est localement connexe en toute dimension $\leqq n - 1$ (donc où il est un rétracte absolu de voisinage). On démontre [1] dans ce cas que F *coupe l'espace en un nombre fini* ($\geqq 1$) *de domaines* (cela est d'ailleurs une conséquence du fait que le n-ème nombre de Betti de F est fini). En outre, *si* p *est un point de* F *appartenant à la frontière d'un de ces domaines,* p *en est accessible.* Puis, *la frontière de* F *est localement connexe* (en dimension 0).

9. — *Problèmes quantitatifs. Groupes d'homotopie.* — Si l'espace n'est pas connexe en dimension n, le problème s'impose de *calculer* le degré de non-connexité. Dans le cas $n = 0$, c'est bien le nombre des composantes de l'espace (c'est-à-dire des ensembles connexes saturés) qui donne la réponse à ce problème. Pour n arbitraire la réponse, au point de vue de l'homologie, est donnée par le n-ième nombre de Betti (et d'une façon plus précise: par le n-ième groupe de Betti). Au point de vue de l'homotopie, on n'était renseigné sur ce problème jusqu'à présent que dans le cas $n = 1$, notamment, par le groupe fondamental de Poincaré (que l'on pourrait nommer le premier groupe

[1] K. Borsuk, *ibid.*, t. 19 (1932), p. 230-234.

d'homotopie). Une étude systématique du n-ème groupe d'homotopie n'a été entreprise que tout récemment par M. HUREWICZ [1].

Voici la définition du n-ème groupe d'homotopie. Soit Y un espace connexe et localement contractile; soient b un point fixe de Y et a un point fixe de S_{n-1} (par exemple le point 1, 0, 0, ..., 0). Considérons, dans l'espace $Y^{S_{n-1}}$, le sous-ensemble F_n composé de fonctions f telles que $f(a) = b$. Le n-ème groupe d'homotopie de Y est par définition le groupe fondamental de l'ensemble F_n. On constate facilement que ce groupe ne dépend pas du choix des points a et b et que pour $n = 1$ il coïncide avec le groupe de Poincaré.

Bien entendu, si $c(Y) = n$, c'est-à-dire si l'espace est péanien jusqu'à la dimension n, tous les groupes d'homotopie jusqu'au n-ième s'annulent. Si cette égalité n'a pas lieu, les groupes d'homotopie permettent d'approfondir l'étude de la structure de l'espace Y au point de vue de la connexité, bien que cet espace ne soit pas connexe en certaines dimensions.

Un nouveau chapitre de la théorie générale de la connexité se trouve ainsi inauguré.

---

[1] *Proceed. Akad. Amsterdam*, 38 (1935), p. 112. Pour la définition, cf. aussi E. CECH, *C. R. Congrès Int. Math. Zurich*, 1932, vol. 2, p. 194.