Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES PROPRIETIES INFINITÉSIMALES DES ENSEMBLES FERMÉS ET LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT

Autor: Kaufmann, B.

Kapitel: II. – LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28024

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

à *justifier* une notion nouvellement introduite et cela par l'indication de sa signification pour une classe d'objets donnée *indépendamment de cette notion* et aussi générale que possible.

Enfin, je mentionnerai encore une troisième attitude: par des définitions (des axiomes) on peut déterminer une nouvelle classe d'objets satisfaisant aux conditions données. Ensuite on examine d'autres propriétés de l'objet. Pour cette attitude il ne faut pas oublier que le nouvel objet dépend généralement des définitions. Cette attitude est d'usage pour établir une théorie abstraite nouvelle et le développement cohérent de cette théorie doit la justifier. Pratiquement, elle est suggérée par le désir d'étudier les problèmes difficiles d'homéomorphie et d'homotopie au moins dans des conditions plus spéciales et plus faibles. Les trois attitudes sont courantes dans la topologie.

II. — Le principe inductif de l'enlacement.

5. — Les pages suivantes seront consacrées à un bref exposé de la théorie infinitésimale des ensembles les plus généraux. Il s'agira sans exception de propriétés d'*origine intégrale* dans le sens du critère énoncé plus haut. Ce sont, d'ailleurs, les résultats d'une suite de recherches que j'avais abordées dans les dernières années et qui, je crois, font connaître pour le moment plusieurs nouvelles relations importantes pour la structure infinitésimale des ensembles. Je voudrais d'ailleurs me restreindre aux questions de principe de ces recherches. La compréhension et la classification de ces principes nous sera facilitée si nous retenions quelques phases du développement de la topologie générale. On peut noter, je crois, trois moments critiques, décisifs pour ce développement.

Le premier moment critique s'est présenté le jour où l'on s'est rendu compte de l'*importance des relations d'enlacement pour la topologie générale.* On avait reconnu notamment que la décomposition d'un espace par un ensemble n'était qu'un cas particulier d'enlacement de l'ensemble avec un cycle de dimension duelle. On sait que cette découverte est due à MM. Lebesgue

et BROUWER[1]. En topologie combinatoire ce sont les théorèmes de dualité qui relèvent le mieux l'importance de cette découverte. Ce sont les relations d'intersection et notamment les indices de Kronecker dont la théorie complète est due à M. LEFSCHETZ qui forment leur outil le plus important.

En particulier, cette conception a permis d'introduire la notion de la multiplicité générale qui est fondamentale pour l'exposé qui suit.

Soit U un voisinage sphérique dans R^n. Un ensemble fermé à r dimensions F dans U est appelé une *multiplicité générale* s'il existe un cycle algébrique Γ^{n-r-1} dans U irréductiblement enlacé avec F; c'est-à-dire $\Gamma^{n-r-1} \not\sim 0$ dans U — F tandis qu'on a $\Gamma^{n-r-1} \sim 0$ dans U — F′ pour chaque vrai sous-ensemble F′ de F[2].

La grande importance de ces multiplicités s'explique par leur valeur universelle. Comme M. ALEXANDROFF a pu le montrer, chaque ensemble fermé à r dimensions contient une multiplicité générale à r dimensions[3].

Un second point de vue qui — au moins pendant quelques années de suite — a fortement influencé la topologie, était le suivant: on *conçoit la nature de la dimension d'un ensemble comme un invariant à définir inductivement*, l'induction se rapportant à une suite de décompositions d'un ensemble par des ensembles à un nombre inférieur de dimensions. Ce principe aussi est dû à M. BROUWER.

Le troisième pas est fait par la *théorie de l'approximation* que nous avons déjà mentionnée et dont le développement est dû notamment à MM. ALEXANDROFF et LEFSCHETZ.

Le principe que je voudrais indiquer maintenant apparaissait de plus en plus au cours de mes recherches; il s'agit ici d'une *synthèse du principe de l'enlacement et du principe inductif de la séparation.* J'appellerai ce principe le *principe inductif de l'enlacement* et la configuration des cycles et des ensembles à laquelle il donne lieu le *système inductif de l'enlacement.*

---

1 Voir L. PONTRJAGIN, *Math. Annalen*, 105 (1931), pp. 166-167.

2 La notation $\Gamma^{n-r-1} \sim 0$ désignera désormais l'existence d'un complexe $K^{n-r} \to \Gamma^{n-1}$.

3 Voir P. ALEXANDROFF, Dimensionstheorie, *Math. Annalen*, 106 (1932), pp. 161-238.

6. — Décrivons tout d'abord deux opérations très simples qui, formellement, s'appliquent à des ensembles aussi bien qu'à des cycles.

Soit, dans R^n, A^r un ensemble fermé à r dimensions. Nous appelons *décomposition* de A^r la détermination d'un ensemble $A^{(r-1)}$ à $(r-1)$ dimensions au plus et tel que A^r puisse être représenté comme somme de deux ensembles fermés ${}^1A^r$ et ${}^2A^r$, ${}^1A^r\,{}^2A^r = A^{(r-1)}$, ce que nous écrivons $A^r = {}^1A^r + A^{(r-1)} + {}^2A^r$. Nous appelons *extension* d'un ensemble l'opération inverse; un ensemble donné $A^{(r-1)}$ subit l'extension à un ensemble à r dimensions si l'on parvient à déterminer deux ensembles ${}^1A^r$ et ${}^2A^r$ tels que ${}^1A^r + A^{(r-1)} + {}^2A^r = A^r$ soit une décomposition de A^r.

Nous pouvons définir les opérations correspondantes pour les cycles algébriques. Soit Γ^r un cycle algébrique à r dimensions. La *décomposition* de Γ^r en deux complexes ${}^1C^r$, ${}^2C^r$ sera déterminée si nous indiquons un cycle Γ^{r-1} à $r-1$ dimensions tel que $\Gamma^r = {}^1C^r + {}^2C^r$, ${}^1C^r \rightarrow \Gamma^{r-1}$, $-{}^2C^r \rightarrow \Gamma^{r-1}$. Etant donné un cycle Γ^{r-1} nous appelons *extension* de Γ^{r-1} la détermination ou la construction de deux complexes ${}^1C^r$ et ${}^2C^r$ tels que ${}^1C^r + {}^2C^r = \Gamma^r$ soit décomposé par Γ^{r-1}.

Soit $F = B^r$ un ensemble fermé à r dimensions — dans le sens de M. Brouwer — intérieur à un voisinage sphérique U borné dans R^n par une sphère à $(r-1)$ dimensions. Soient

$$B^r\,,\quad B^{r-1}\,,\quad \ldots\,,\quad B^{r-j}\,,\quad \ldots\,,\quad B^0\,,$$

une suite d'ensembles fermés à $(r-j)$ dimensions $(j = 0, 1, \ldots, r)$ tels que chaque ensemble B^{r-j-1} décompose l'ensemble B^{r-j} en deux sous-ensembles ${}^1B^{r-j}$ et ${}^2B^{r-j}$,

$$B^{r-j} = {}^1B^{r-j} + B^{r-j-1} + {}^2B^{2-j}\,.$$

Soit Γ^{n-r-1} un cycle algébrique (mod. 0) à $(n-r-1)$ dimensions, satisfaisant à la condition

$$\Gamma^{n-r-1} \sim 0 \qquad \text{dans} \qquad U - B^r$$

et soient

$$\Gamma^{n-r}\,,\quad \Gamma^{n-r+1}\,,\quad \ldots\,,\quad \Gamma^{n-r+j}\,,\quad \ldots\,,\quad \Gamma^{n-r-1}$$

une suite d'extensions du cycle Γ^{n-r-1}

$$\Gamma^{n-r+j} = {}^1Q^{n-r+j} + {}^2Q^{n-r+j} ,$$

où l'on a pour chaque $j = 0, 1, 2, \ldots, r$

$$\begin{aligned} {}^1Q^{n-r+j} &\longrightarrow \Gamma^{n-r+j-1} \quad \text{dans} \quad U - {}^1B^{r-j} , \\ - {}^2Q^{n-r+j} &\longrightarrow \Gamma^{n-r+j-1} \quad \text{dans} \quad U - {}^1B^{r-j} . \end{aligned}$$

Si les suites $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}_{j=0,1,\ldots,r}$ et $\{B^{r-j}\}_{j=0,1,\ldots,r}$ satisfont à ces conditions, nous dirons qu'elles forment un *système inductif d'enlacement* relatif à l'ensemble F.

Etant donné un système inductif d'enlacement, nous appelons les suites $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ une *suite fondamentale de cycles* et la suite $\{B^{r-j}\}$ une *suite fondamentale d'ensembles* du système d'enlacement en question.

7. — Etant donné un système inductif d'enlacement, on en tire d'abord une extension inductive de l'important théorème Phragmen-Brouwer-Alexandroff. Conformément à l'hypothèse, l'ensemble $F = B^r$ est un obstacle d'homologie par rapport au cycle Γ^{n-r-1}, c'est-à-dire que l'on a, dans $U - B^r$, $\Gamma^{n-r-1} \not\sim 0$. De ce fait le théorème Phragmen-Brouwer généralisé affirme qu'il existe dans B^r rel S^{n-1} un vrai cycle enlacé avec Γ^{n-r-1} (mod. m_k) et totalement non homologue dans B^r

$$Z^r = z_1^r , z_2^r , \ldots , z_k^r , \ldots$$

où l'on a pour chaque k

$$z_k^r = {}^1C_k^r + {}^2C_k^r ,$$

$${}^1C_k^r \longrightarrow z_k^{r-1} , \qquad - {}^2C_k^r \longrightarrow z_k^{r-1}$$

et où

$$Z^{r-1} = z_1^{r-1} , \quad z_2^{r-1} , \quad \ldots , \quad z_k^{r-1} , \quad \ldots$$

est un cycle dans B^{r-1} et totalement non homologue 0 dans B^{r-1}. Le cycle Z^r peut être supposé de position générale par rapport à Γ^{n-r-1} de façon que les indices de Kronecker (de module variable m_k) puissent être déterminés pour chaque k.

La généralisation inductive du théorème Brouwer-Alexandroff. Soit

$$\{\Gamma^{n-r+j-1}\}_{j=0,1,\dots,r}, \qquad \{B^{r-j}\}_{j=0,1,\dots,r}$$

un système inductif d'enlacement relatif à F. Nous affirmons que:

1° Il existe une suite de cycles entiers

$$\{Z^{r-j} = z_1^{r-j}, z_2^{r-j}, \dots, z_r^{r-j}, \dots\}_{j=0,1,\dots,r} \qquad (\text{mod. } m_k),$$

telle que, pour chaque j, Z^{r-j} soit un cycle entier dans B^{r-j}, totalement non homologue 0 dans B^{r-j}, où

$$z_k^{r-j} = {}^1C_k^{r-j} + {}^2C_k^{r-j},$$

$${}^1C_k^{r-j} \to z^{r-j-1} \qquad \text{dans} \qquad {}^1B_k^{r-j},$$

$$-{}^2C_k^{r-j} \to z_k^{r-j-1} \qquad \text{dans} \qquad {}^2B_k^{r-j};$$

2° On a, pour chaque j, $\Gamma^{n-r+j-1} \not\sim 0$ dans $U - B^{r-j}$.

Ce théorème se démontre aisément par induction; l'on démontre les propriétés 1° et 2° alternativement pour des j croissants. De la validité de la relation 2° pour $j = 0$ découle — d'après la définition du système d'enlacement — la validité de 2° pour chaque $j = 1, 2, \dots, r$. De ce fait, chaque ensemble B^{r-j} est un obstacle d'homologie du cycle $\Gamma^{n-r+j-1}$ étendu j fois, ce qui explique le nom de « système d'enlacement » pour la configuration formée des suites $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ et $\{B^{r-j}\}$.

En construisant encore les cycles entiers $\{Z^{r-j}\}$ qui correspondent univoquement aux ensembles décomposants $\{B^{r-j}\}$, nous obtenons une configuration efficace au point de vue combinatoire. Pour chaque j elle satisfait aux relations 1° et 2° et, pour préciser, nous la notons dans le tableau suivant. Nous appelons cette configuration un « système combinatoire d'enlacement ».

Soit

$$\Gamma^{n-r-1} \not\sim 0 \qquad \text{dans} \qquad U - B^r.$$

Les relations suivantes (mod. m_k) sont vraies pour chaque $j = 0, 1, \ldots, r$:

$$\Gamma^{n-r+j-1} = {}^1Q^{n-r+j-1} + {}^2Q^{n-r+j-1}, \qquad B^{r-j} = {}^1B^{r-j} + B^{r-j-1} + {}^2B^{r-j},$$

$${}^1Q^{n-r+j} \rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} \quad \text{dans} \quad U - {}^1B^{r-j}$$

$$- {}^2Q^{n-r+j} \rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} \quad \text{dans} \quad U - {}^2B^{r-j},$$

$$Z^{r-j} = \left\{ z_k^{r-j} = {}^1C_k^{r-j} + {}^2C_k^{r-j} \right\}_{k=1,2,\ldots} \quad \text{dans} \quad B^{r-j},$$

$$\left\{ {}^1C_k^{r-j}, \; - {}^2C_k^{r-j} \rightarrow z_k^{r-j-1} \right\}_{k=1,2,\ldots} \quad \text{dans} \quad {}^1B^{r-j}, \; {}^2B^{r-j},$$

$$\left\{ \chi({}^1C_k^{r-j}, \; \Gamma^{n-r+j}) = \chi(- {}^2C_k^{r-j}, \; \Gamma^{n-r+j}) \neq 0 \right\}_{k=1,2,\ldots}$$

$$\Gamma^{n-r+j-1} \sim 0 \quad \text{dans} \quad U - B^{r-j}.$$

8. — L'importance du système inductif d'enlacement repose sur le fait suivant: l'on peut, en retenant les suites $\{B^{r-j}\}$ et $\{Z^{r-j}\}$, remplacer la suite fondamentale de cycles $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ par une suite fondamentale $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$ de cycles *arbitrairement petits* qui forme avec les suites $\{B^{r-j}\}$ et $\{Z^{r-j}\}$ un système combinatoire d'enlacement équivalent. En d'autres termes[1]:

Pour chaque ε arbitrairement petit il existe une suite de cycles $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$,

$$\gamma^{n-r+j-1} = {}^1q^{n-1+j-1} + {}^2q^{n-r+j-1},$$

$${}^1q^{n-r+j} \rightarrow \gamma^{n-r+j-1} \quad \text{dans} \quad U - {}^1B^{r-j},$$

$$- {}^2q^{n-r+j} \rightarrow \gamma^{n-r+j-1} \quad \text{dans} \quad U - {}^2B^{r-j},$$

$$\delta(\gamma^{n-1}) < \varepsilon,$$

qui a les mêmes relations d'intersection et d'enlacement avec les cycles Z^{r-j} que les cycles $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$.

Il est essentiel pour la construction des cycles $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$ de ramener un cycle donné à une « position générale » par rapport à un ensemble de dimension complémentaire.

Nous appelons K^{n-r} un complexe en position générale par rapport à un ensemble B^r, si son « échafaudage » à $(n - r - 1)$ dimensions ne rencontre pas l'ensemble B^r.

---

1 Voir [7] et surtout [9]. Les chiffres gras entre crochets se rapportent à la bibliographie indiquée à la fin.

Nous dirons qu'un complexe K^{n-1} se trouve en position générale par rapport à la suite fondamentale $\{B^{r-j}\}$, si chaque échafaudage à $(n - r + j - 1)$ dimensions de K^{n-1} est en position générale par rapport à l'ensemble B^{r-j}. Un complexe K^{n-1} peut toujours être ramené à un complexe équivalent $*K^{n-1}$ qui serait en position générale par rapport au système $\{B^{r-j}\}$. La construction de $*K^{n-1}$ se fait par une généralisation de la méthode des modifications infinitésimales de complexes de M. Alexandroff. Remarquons encore que les complexes habituels de simplexes étant beaucoup trop « rigides » ne se prêtent guère à la solution du problème de la position générale d'un complexe et d'un ensemble et, surtout, pas dans le cas d'un système d'ensembles $\{B^{r-j}\}$. Pour cette raison l'on construit les complexes modifiés d'éléments qui sont eux-mêmes des complexes correspondant d'une façon univoque et réciproque aux simplexes du complexe donné.

Les invariants d'intersection et d'enlacement nous permettent de construire les cycles $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$ sur un complexe à $(n - 1)$ dimensions et en position générale par rapport au système d'ensembles $\{B^{r-j}\}$. Cette construction découle du simple principe de décompositions « disjonctives » de cycles, qui correspondent aux décompositions d'ensembles de dimension complémentaire et sont déterminées par ces dernières [**9**].

Nous pouvons maintenant formuler le lemme fondamental de cette théorie.

Si les cycles $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ et les ensembles $\{B^{r-j}\}$ forment un système inductif d'enlacement, alors pour chaque nombre $h = 0, 1, \ldots, r$, il existe dans F une multiplicité à h dimensions *arbitrairement petite* f^h, contenant des points de l'ensemble B^0. Il existe, en plus, dans B^0 un *point de multiplicités à* h *dimensions* P^h, c'est-à-dire il existe dans F^0 une suite de multiplicités (générales) à h dimensions $f_1^h \supset f_2^h \supset \ldots$ décroissantes et convergeant en un point P^h intérieur à B^0.

Dans la définition du système inductif d'enlacement la suite fondamentale était donnée d'une façon purement formelle. Par conséquent, les théorèmes énoncés ci-dessus sont valables d'une manière générale pour une multiplicité arbitraire F ou, plus généralement encore, pour un ensemble $F = B^r$ satisfaisant par

exemple aux hypothèses du théorème Phragmen-Brouwer. Le système inductif d'enlacement doit avoir une construction correspondante au problème concret. L'on construit alternativement les cycles et les ensembles de suites fondamentales $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ et $\{B^{r-j}\}$ pour les j croissants et l'on fait sur les ensembles B^{r-j} des hypothèses qui autorisent des conclusions inductives. L'on voit ainsi que ce sont seulement les démonstrations des théorèmes exposés brièvement dans la suite qui font voir toute la fécondité des systèmes inductifs d'enlacement.

III. — La structure d'ensembles à partir de multiplicités arbitrairement petites. Les nouveaux théorèmes de pavage.

9. — C'est l'extension locale du théorème Phragmen-Brouwer-Alexandroff qui forme le premier échelon de la théorie infinitésimale des ensembles [**1**, **2**]. Le théorème suivant est valable:

Soit F une multiplicité à r dimensions ou, plus généralement, un ensemble ($\dim F = r$) satisfaisant aux hypothèses du théorème Brouwer-Alexandroff. Soit $F = {}^1F + B^{r-1} + {}^2F$ une décomposition de F par un ensemble B^{r-1} à $(r - 1)$ dimensions en deux composants ouverts ${}^1F$ et ${}^2F$. Alors, il existe une multiplicité à r dimensions *arbitrairement petite* $f^r = {}^1f^r + b^{r-1} + {}^2f^r$ décomposé par un sous-ensemble b^{r-1} de B^{r-1} en deux parties ouvertes ${}^1f^r \subset {}^1F$ et ${}^2f^r \subset {}^2F$.

La démonstration de ce théorème [**6**] découle de l'invariance locale des cycles placés dans les deux premières lignes du système d'enlacement. Le cas particulier $r = n - 1$ de ce théorème fut démontré pour la première fois et par des méthodes très différentes par M. H. D. Ursell et moi-même [**2**, **3**, **4**, **5**, **8**]. Les représentations dites harmoniques de complexes qui surgissent dans ce cas particulier et leurs invariants sont aussi, me semble-t-il, intéressantes en elles-mêmes. Ce théorème entraîne aussi que l'ensemble de tous les points de multiplicités r-dimensionnels dans F est à une dimension.

Les résultats suivants montrent très nettement que *la totalité*