Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE NOMBRE DE POLYNÔMES À HAUTEUR DONNÉE
Autor: Martin, M. H. / Seidenberg, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28041

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LE NOMBRE DE POLYNÔMES À HAUTEUR DONNÉE

PAR

M. H. MARTIN et A. SEIDENBERG (Université de Maryland, U.S.A.).

Soit

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 , \qquad a_n > 0 ,$$

un polynôme à coefficients entiers. D'après Georg CANTOR on appelle *hauteur du polynôme* la quantité

$$h = n + a_n + |a_{n-1}| + \dots + |a_0| .$$

Nous nous proposons de démontrer ici les trois théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. — *Le nombre* N (h, n) *de polynômes à degré* n *et hauteur* h *est donné par la formule*

$$\mathrm{N}(h, n) = 1 + 2\binom{n}{1}\binom{h-n-1}{1} + 2^2\binom{n}{2}\binom{h-n-1}{2} + \dots + l ,$$

où le dernier terme dépend de h *et* n, *à savoir:*

$$l = 2^n\binom{h-n-1}{n} \text{ pour } n < \frac{h-1}{2} ; \quad l = 2^n \text{ pour } n = \frac{h-1}{2} ;$$

$$l = 2^{h-n-1}\binom{n}{h-n-1} \text{ pour } n > \frac{h-1}{2} .$$

Le nombre N (h, n) *satisfait la relation*

$$\mathrm{N}(h, n) = \mathrm{N}(h, h-n-1) ,$$

c'est-à-dire que, pour h *fixe, le nombre de polynômes à degré* n *est égal au nombre de polynômes à degré* h — n — 1.

THÉORÈME 2. — *Le nombre* N (h, n) *est égal au coefficient de* ξ^n *dans le développement de* $(\xi + 2)^n (1 + \xi)^{h-n-1}$.

THÉORÈME 3. — *Le nombre* N (h) *de polynômes à hauteur* h *est donné par la formule*

$$N(h) = \binom{h}{1} + 2\binom{h}{3} + 2^2\binom{h}{5} + \dots + l' ,$$

où le dernier terme est égal à $h2^{\frac{h-2}{2}}$ *pour* h *pair, et à* $2^{\frac{h-1}{2}}$ *pour* h *impair.*

Démonstration du théorème 1. — La relation définissant la hauteur h peut s'écrire sous une forme d'une équation diophantine

$$a_n + |a_{n-1}| + \dots + |a_0| = h - n , \qquad a_n > 0 ,$$

où $h - n > 0$. Considérons le produit

$$(\xi^1 + \xi^2 + \dots + \xi^{a_n} + \dots)(\xi^0 + 2\xi^1 + 2\xi^2 + \dots + 2\xi^{|a_{n-1}|} + \dots) \dots$$
$$\dots (\xi^0 + 2\xi^1 + 2\xi^2 + \dots + 2\xi^{|a_0|} + \dots) .$$

Le coefficient de

$$\xi^{h-n} = \xi^{a_n} \xi^{|a_{n-1}|} \dots \xi^{|a_0|}$$

dans ce produit est évidemment égal au nombre N (h, n) de solutions distinctes de l'équation diophantine mentionnée. D'ailleurs le produit en question peut s'écrire

$$\frac{\xi}{1-\xi}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^n = \frac{\xi}{1-\xi}\,\frac{(1-\xi+2\xi)^n}{(1-\xi)^n} =$$
$$= \xi\left[\frac{1}{1-\xi} + \binom{n}{1}\frac{2\xi}{(1-\xi)^2} + \binom{n}{2}\frac{2^2\xi^2}{(1-\xi)^3} + \dots\right] ,$$

d'où le théorème 1 se déduit aisément.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, il suffit de remplacer, dans l'expression qui donne N (h, n), n par $h - n - 1$.

Démonstration du théorème 2. — Ce théorème suit immédiatement le développement de $(\xi + 2)^n$ et de $(1 + \xi)^{h-n-1}$.

Démonstration du théorème 3. — Nous avons tout d'abord

$$N(h) = \sum_{\nu=0}^{h-1} N(h, \nu) ,$$

d'où on déduit en appliquant le théorème 2 que le nombre $N(h)$ est égal au terme indépendant de la somme

$$\sum_{\nu=0}^{h-1} \frac{(\xi + 2)^\nu (1 + \xi)^{h-\nu-1}}{\xi^\nu}$$

Mais cette somme peut s'écrire

$$(1 + \xi)^{h-1} \sum_{\nu=0}^{h-1} \left(\frac{2 + \xi}{\xi + \xi^2}\right)^\nu = \frac{1}{\xi^{h-1}} \frac{(2 + \xi)^h - (\xi + \xi^2)^h}{2 - \xi^2} .$$

Donc $N(h)$ est le coefficient de ξ^{h-1} dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{2} \frac{(\xi + 2)^h}{1 - \frac{\xi^2}{2}}$$

en séries de Maclaurin. Le résultat annoncé s'en déduit sans difficulté.

On peut étendre la méthode précédente aux problèmes diophantins d'un type plus général. Mais pour le problème spécial qui nous occupe ici on peut suivre un chemin plus direct.

Démonstration du théorème 3. — Considérons en premier lieu le polynôme

$$\alpha x^\beta + \alpha_p x^{\beta_p} + \alpha_{p-1} x^{\beta_{p-1}} + \dots + \alpha_1 x^{\beta_1} , \qquad \text{(P)}$$

à hauteur h qui se compose de $p + 1$ termes, où α et $\beta > \beta_p > \beta_{p-1} > \dots > \beta_1 \geqq 0$ sont des entiers non-négatifs et $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1$ sont des entiers quelconques non évanouissables, et tels que

$$\beta + \alpha + |\alpha_p| + |\alpha_{p-1}| + \dots + |\alpha_1| = h .$$

Nous nous proposons de calculer le nombre de ces polynômes.

Supposons d'abord que α_p, α_{p-1}, ..., α_1 sont tous positifs, c'est-à-dire que

$$\alpha \geqq 1\,,\ \alpha_p \geqq 1\,,\ \alpha_{p-1} \geqq 1\,,\ \ldots,\ \alpha_1 \geqq 1\ ,$$

et considérons les $2p + 1$ entiers

$$0 \leqq s_1 < s_2 < \ldots < s_p < s_{p+1} < s_{p+2} < \ldots < s_{2p} < s_{2p+1} \leqq h - 1\ , \tag{I}$$

définis par les équations

$$\begin{array}{ll}
s_1 = \beta_1\,, & s_{p+1} = h - \alpha - \alpha_p - \ldots - \alpha_2 - \alpha_1 = \beta\ , \\
s_2 = \beta_2\,, & s_{p+2} = h - \alpha - \alpha_p - \ldots - \alpha_2\ , \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_p = \beta_p\,, & s_{2p} = h - \alpha - \alpha_p\ , \\
 & s_{2p+1} = h - \alpha\ .
\end{array}$$

En résolvant ces équations par rapport à α, β, α_i, β_i, nous obtenons

$$\begin{array}{ll}
\beta_1 = s_1\,, & \alpha_1 = s_{p+2} - s_{p+1}\ , \\
\beta_2 = s_2\,, & \alpha_2 = s_{p+3} - s_{p+2}\ , \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_p = s_p\,, & \alpha_p = s_{2p+1} - s_{2p}\ , \\
\beta = s_{p+1}\,, & \alpha = h - s_{2p+1}\ .
\end{array}$$

Il s'ensuit qu'il existe une correspondance bi-univoque entre les polynômes (P) aux coefficients positifs et les ensembles d'entiers (I). Il y a donc autant de polynômes (P) que d'ensembles (I), à savoir $\binom{h}{2p+1}$.

Ajoutons maintenant le cas où α_p, α_{p-1}, ..., α_1 peuvent prendre des valeurs négatives, et on voit facilement que le nombre de polynômes devient $2^p \binom{h}{2p+1}$.

La démonstration du théorème 3 s'achève en effectuant la sommation de résultats précédents pour $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Démonstration du théorème 1. — Comme auparavant nous commençons par le cas où α_p, α_{p-1}, ..., α_1 sont des entiers posi-

tifs. Mettons $s_{p+1} = \beta = n$ en nous limitant aux polynômes de degré n qui ont des coefficients positifs. Le nombre de tels polynômes est égal au nombre d'ensembles des entiers (I) ou $s_{p+1} = n$, c'est-à-dire $\binom{n}{p}\binom{h-n-1}{p}$.

Si maintenant nous admettons des valeurs négatives pour $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots, \alpha_1$, le nombre des polynômes (P) devient

$$2^p \binom{n}{p}\binom{h-n-1}{p}.$$

Le théorème 1 se déduit de la sommation de ces résultats pour $p = 0, 1, 2, \ldots$.

La seconde méthode a l'avantage de donner une interprétation directe des termes individuels dans les formules pour N (h) et N (h, n).

Université de Maryland.
College Park, Etats-Unis.

L'ÉQUIVALENCE, LA DÉFINITION ET LA SOLUTION DU PARADOXE DE RUSSELL [1]

PAR

Ch. PERELMAN (Bruxelles).

On entend par équivalence formelle une équivalence établie entre deux fonctions propositionnelles; on dit qu'une telle équivalence est vraie quand, *quelle que soit la valeur de la variable*, les propositions obtenues en remplaçant, dans les deux membres de l'équivalence, la variable par le même argument ont la même valeur, c'est-à-dire sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Une équivalence formelle est fausse quand ceci n'est pas vrai pour toutes les valeurs de la variable.

[1] Le présent article complète un travail paru dans *Mind*, vol. XLV, n° 178 (avril 1936), et intitulé « Les Paradoxes de la Logique »; cf. aussi ma communication « Une solution des paradoxes de la logique et ses conséquences pour la conception de l'infini » dans les *Travaux du IXe Congrès International de Philosophie*, Vol. VI.